Titre : **Théorème de Grothendieck**
Recasages : 201,205,208,234
Thème : Analyse fonctionnelle. Intégration.
Références : Rudin - Analyse fonctionnelle (p.118)

Théorème 1. *Soient (X, A, μ) un espace mesuré de mesure totale finie, $1 \leqslant p < \infty$, et $F \subset L^p(X)$ un sous-espace vectoriel fermé, inclus dans $L^\infty(X)$. Alors F est de dimension finie.*

On peut supposer que $\mu(X) = 1$ quitte à normaliser μ par $\mu(X)$.
Étape 1 : On a par hypothèse une inclusion $\iota : (F, \|.\|_p) \hookrightarrow (L^\infty(X), \|.\|_\infty)$. On montre que le graphe de ι est fermé dans $F \times L^\infty(X)$.
Soit $(f_n, \iota(f_n))$ une suite du graphe de ι, qui converge vers $(f, g) \in F \times L^\infty(X)$, ceci est par définition équivalent à dire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme $\|.\|_p$ et vers g pour la norme $\|.\|_\infty$. Cependant, on a dans une espace probabilisé $\|.\|_p \leqslant \|.\|_\infty$, donc $\|f_n - g\|_p \leqslant \|f_n - g\|_\infty$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans $L^p(X)$, on a alors $f = g$ dans $L^p(X)$ par unicité de la limite. Comme F est fermé dans $L^p(X)$, on a $f = g \in L^p(X)$ et donc $g = \iota(f) \in L^\infty(X)$, le graphe de ι est bien fermé.
Par le théorème du graphe fermé, ι et continue : il existe donc une constante $M > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant M \|f\|_p$ pour $f \in F$.
Étape 2 : Montrons qu'il existe $\widetilde{M} > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant \widetilde{M} \|f\|_2$ pour $f \in F$.

- Le cas $p = 2$ provient directement de la première étape.
- Si $1 \leqslant p < 2$, pour $f \in L^2(X)$, on a, par l'inégalité de Hölder

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu \leqslant \left(\int_X (|f|^p)^{2/p} d\mu\right)^{p/2} \left(\int_X d\mu\right)^{p/(2-p)} = \|f\|_2^p$$

  d'où $\|f\|_\infty \leqslant M \|f\|_p \leqslant M \|f\|_2$ pour $f \in F$ en particulier.
- Si $p > 2$, pour $f \in F$, on a

$$|f|^p = |f|^{p-2}|f|^2 \leqslant \|f\|_\infty^{p-2} |f|^2$$

  presque surement. En intégrant cette inégalité, on obtient $\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2$, et donc

$$\|f\|_\infty^p \leqslant M^p \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2 \Rightarrow \|f\|_\infty \leqslant M^{p/2} \|f\|_2$$

On a bien le résultat souhaité dans tous les cas.
Étape 3 : Soit $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ une famille orthonormée de $F \subset L^2(X)$, nous montrons que n est majorée par une constante fixée, qui bornera alors la dimension de F. Considérons Q une partie dense et dénombrable de B la boule unitée fermée de $\mathbb{C}^n$, pour $c = (c_1, \cdots, c_n) \in Q$, on pose $f_c = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i$, on a par construction $\|f_c\|^2 \leqslant 1$, et donc $\|f\|_\infty \leqslant \widetilde{M}$ par l'étape précédente. Par définition de $\|.\|_\infty$, il existe un $X_c \in A$, de complémentaire négligeable, tel que $|f(x)| \leqslant \widetilde{M}$ pour tout $x \in X_c$. On pose $\Omega := \bigcap_{c\in Q} X_c$, qui est de complémentaire négligeable comme intersection dénombrable d'éléments de complémentaires négligeables. Pour $x \in \Omega$, on a

- L'application $g_x : c \mapsto |f_c(x)|$ est continue sur B.
- Pour tout $c \in Q$, on a $g_x(c)| \leqslant \widetilde{M}$.

Par densité de Q, $g_x(c) \leqslant \widetilde{M}$ sur B, d'où

$$\forall x \in \Omega, \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(x)|^2 \leqslant \widetilde{M}$$

En intégrant cette inégalité, on obtient $n \leqslant \widetilde{M}^2$, ce qui termine la démonstration.