<u>Titre :</u> Intégrale de Gauss
Recasages : 236,245
Thème : Analyse complexe, analyse complexe, analyse complexe.
Références : Sanglier de Cornouailles

Théorème 1. *On a*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

.

On introduit $a := \sqrt{\pi}e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}(1+i)$, (on a $a^2 = i\pi$, $a^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-i\pi/4} = \overline{a}/\pi$) $g : z \mapsto 1 + e^{-2az}$ et l'on pose

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{g(z)} = \frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}}$$

Quels sont les pôles P de cette fonction ? On cherche les solutions de $g(z) = 1 + e^{-2az} = 0$, i.e

$$\begin{aligned}
e^{-2az} = -1 &\Leftrightarrow -2az = i(2k+1)\pi \\
&\Leftrightarrow 2az = i(2k+1)\pi \\
&\Leftrightarrow z = \frac{i(2k+1)\pi}{2a} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{i(2k+1)\pi\overline{a}}{2\pi} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{(2k+1)}{2}a
\end{aligned}$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$g(a+z) = 1 + e^{-2a(a+z)} = 1 + e^{-2a^2}e^{-2az} = 1 + e^{-2az} = g(z)$$

car $a^2 = i\pi$: la fonction g est a-périodique. On remarque ensuite que, pour $z \in \mathbb{C} \setminus P$, on a $f(z) - f(a+z) = e^{-z^2}$, en effet :

$$\begin{aligned}
f(z) - f(a+z) &= \frac{e^{-z^2}}{g(z)} - \frac{e^{-(z+a)^2}}{g(z+a)} \\
&= \frac{e^{-z^2}}{g(z)} - \frac{e^{-z^2}e^{a^2}e^{-2az}}{g(z)} \\
&= \frac{e^{-z^2} + e^{-z^2}e^{-2az}}{g(z)} \\
&= \frac{e^{-z^2}(1+e^{-2az})}{g(z)} \\
&= e^{-z^2}
\end{aligned}$$

Nous allons intégrer la fonction f le long du lacet γ défini comme la concaténation des lacets suivants ($M > \sqrt{\pi}$, hypothèse technique) (faire un dessin) :

- $\gamma_1 : t \mapsto t$ pour $t \in [-M; M]$.
- $\gamma_2 : t \mapsto M + ti$ pour $t \in [0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$.
- $\gamma_3 : t \mapsto t + \sqrt{\frac{\pi}{2}}i$ pour $t \in [M; -M]$.
- $\gamma_4 : t \mapsto -M + ti$ pour $t \in [\sqrt{\frac{\pi}{2}}; 0]$.

L'intérieur de ce lacet contient des éléments de partie imaginaire comprise entre 0 et $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, le seul pôle de la fonction f présent à l'intérieur de ce lacet est donc $\frac{a}{2}$, dont nous calculons le résidus. On calcule

$$\left(z-\frac{a}{2}\right)f(z)=e^{-z^2}\frac{\left(z-\frac{a}{2}\right)}{g(z)}$$

Par la règle de l'Hôpital, on a

$$\lim_{z\to\frac{a}{2}}\frac{\left(z-\frac{a}{2}\right)}{g(z)}=\lim_{z\to\frac{a}{2}}\frac{1}{g'(z)}=\frac{1}{g'(a/2)}=\frac{1}{2a}$$

On a donc

$$Res(f,a/2)=2i\pi\frac{e^{-(a/2)^2}}{2a}=2i\pi\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2a}=2\pi\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}}=\sqrt{\pi}$$

Ensuite, on a

$$\oint_\gamma f(z)dz=\int_{-M}^{M}f(t)dt+\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}if(M+ti)dt-\int_{-M}^{M}f\left(t+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)dt-\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}if(-M+ti)dt$$

<u>Intégrale de f sur γ_2 et γ_4 :</u>

<u>Lemme</u> 2. *Il existe une constante $\alpha>0$ ne dépendant pas de $M>\sqrt{\pi}$ telle que $|g|\geqslant\alpha$ sur* $\operatorname{Im}\gamma_2\cup\operatorname{Im}\gamma_4$

Démonstration. Soit $t\in[0,\sqrt{\pi/2}]$, on a

$$|g(\gamma_2(t))|\geqslant 1-|e^{-2a(M+it)}|=1-e^{-\sqrt{2\pi}(M-t)}\geqslant 1-e^{-\sqrt{2\pi}(\sqrt{\pi}-\sqrt{\pi/2})}=1-e^{-\pi(\sqrt{2}-1)}$$

et

$$|g(\gamma_4(t))|\geqslant|1-|e^{-2a(-M+it)}||=|1-e^{\sqrt{2\pi}(M+t)}|\geqslant e^{\sqrt{2\pi}\sqrt{\pi}}=e^{\sqrt{2}\pi}$$

□

On a alors

$$|f(z)|\leqslant\alpha^{-1}e^{-(M+it)^2}$$

La fonction intégrée étant continue et intégrée sur un fermé borné, on peut dans les deux cas appliquer la convergence dominée pour conclure $\oint_{\gamma_2}f(z)dz\to 0$ et $\oint_{\gamma_4}f(z)dz\to 0$.
<u>Intégrale de f sur γ_1 et γ_3 :</u> On a

$$\int_{-M}^{M}f(x+i\sqrt{\pi/2})dx=\int_{-M-\sqrt{\pi/2}}^{M-\sqrt{\pi/2}}f(y+a)dy$$

On souhaite appliquer le théorème de convergence dominée à $\oint_{\gamma_1}f(z)dz$ et $\oint_{\gamma_3}f(z)dz$.

<u>Lemme</u> 3. *Il existe $\beta>0$ ne dépendant pas de $M>\sqrt{\pi}$ telle que $|g(x)|=|g(x+a)|\geqslant\beta$ sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. On a pour $x\in\mathbb{R}$

$$g(x)=g(x+a)=1+e^{-2ax}=1+e^{-\sqrt{2\pi}(1+i)x}=1+e^{-\sqrt{2\pi}x}e^{-i\sqrt{2\pi}x}$$

- Si $|x| < \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$, alors $|g(x)| \geqslant |\Re\mathrm{e}(g(x))| \geqslant 1$ car alors $\sqrt{2\pi}x \in [-\pi/2, \pi/2]$
- Si $x \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$, alors $|g(x)| \geqslant 1 - e^{-2\pi x} \geqslant 1 - e^{-2\pi\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}$
- Si $x \leqslant -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$, alors $|g(x)| \geqslant e^{-2\pi x} - 1 \geqslant 1 - e^{2\pi\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}$

$\square$

On a donc
$$|\mathbb{1}_{[-M,M]} f(x)| \leqslant e^{-x^2}/\beta$$
Qui est intégrable sur $\mathbb{R}$, de même pour l'intégrale sur γ_3, par convergence dominée, on a donc
$$\sqrt{\pi} = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx - \int_{\mathbb{R}} f(x+a)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$$
Ce qui termine la démonstration.