<u>Titre :</u> Prolongement complexe Gamma
Recasages : 207,236,239,245,265
Thème : Intégration, analyse complexe
Références : Zuily, Quéffélec - Analyse pour l'agrégation

<u>Théorème</u> 1. *La fonction*

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

est bien définie et holomorphe sur $\Omega_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re\mathrm{e}(z) > 0\}$.
Elle se prolonge à $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$ *en une fonction méromorphe, donc le résidu en* $-n$ *est* $\frac{(-1)^n}{n!}$. *On a de plus la formule de Weierstrass*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

qui prouve en particulier que $1/\Gamma$ *se prolonge en une fonction entière.*

<u>Étape 1 :</u> Montrons que Γ est holomorphe sur Ω_0. On utilise le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, on pose $f(t,z) := t^{z-1}e^{-t}$ (définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \Omega_0$).

- Pour tout $z \in \Omega_0$, la fonction $f(.,z) : z \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, en effet, on a

$$|f(t,z)| = e^{\ln(t)(\Re\mathrm{e}(z)-1)-t}$$

- Pour tout $t > 0$, la fonction $f(t,.) : z \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est holomorphe.
- Soit $K \subset \Omega_0$ un compact, $\Re\mathrm{e}(K)$ est inclus dans un segment $[a,b]$ avec $a > 0$. On a alors

$$\forall z \in K, t > 0, |f(t,z)| = t^{\Re\mathrm{e}(z)-1}e^{-t} \leqslant \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \leqslant 1 \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

  Cette dernière fonction étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème d'holomorphie sous intégrale, on a bien que Γ est holomorphe sur Ω_0.

<u>Étape 2 :</u> On prolonge Γ à $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$. En intégrant par parties, on a

$$\forall z \in \Omega_0, \Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}dt = \left[-e^{-t}t^z\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z)$$

En itérant ce résultat, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, z \in \Omega_0,\ \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z}$$

Or, le membre de droite définit une fonction holomorphe sur l'ouvert

$$\Omega_n := \{z \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N} \mid \Re\mathrm{e}(z) > -n\}$$

qui coïncide avec Γ sur l'ouvert non vide Ω_0. Par prolongement analytique, le membre de droite définit un prolongement holomorphe de Γ à Ω_n. Ceci étant vrai pour tout n, Γ se prolonge à $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, au voisinage de $-n$

$$(z+n)\Gamma(z) = \frac{(z+n)\Gamma(z+n+1)}{(z+n)(z+n-1)\cdots z} = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n-1)\cdots z}$$

Qui tends vers $\frac{\Gamma(1)}{(-1)(-2)\cdots(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}$ quand z tend vers $-n$, d'où le résidu attendu.

Étape 3 : Calcul de $1/\Gamma$. Soit $x > 0$ un réel, pour $N \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale

$$I_N(x) = \int_0^N t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N dt$$

Par convergence dominée, on a $\lim_{N\to\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$: le seul point non immédiat est la domination, on a (sur $[0, N]$)

$$\left| t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N \right| = t^{x-1} e^{N \ln(1-t/N)} \leqslant t^{x-1} e^{-t}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où le résultat.
Par ailleurs, en intégrant par parties dans I_N, on obtient

$$I_N(x) = \left[\frac{t^x}{x}\left(1 - \frac{t}{N}\right)^N\right]_0^N - \int_0^N \frac{t^x}{x} \frac{-N}{N} \left(1 - \frac{t}{N}\right)^{N-1} dt = \frac{1}{x}\frac{N}{N} \int_0^N t^x \left(1 - \frac{t}{N}\right)^{N-1} dt$$

En intégrant de nouveau par parties (récurrence immédiate), on obtient

$$\begin{aligned}
I_N(x) &= \frac{1}{x}\frac{N}{N}\frac{1}{x+1}\frac{N-1}{N} \cdots \frac{1}{x+N-1}\frac{1}{N} \int_0^N t^{x+N-1} dt \\
&= \frac{N!}{N^N}\frac{N^{x+N}}{x+N} \prod_{k=0}^{N-1} (x+k)^{-1} \\
&= \frac{N^x}{x} \prod_{k=1}^{N} \frac{k}{x+k} \\
&= \left(x N^{-x} \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{x}{k}\right) \right)^{-1}
\end{aligned}$$

Comme Γ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ (intégrale d'une fonction continue strictement positive), on a

$$\forall x > 0, \ \frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{N\to+\infty} x N^{-x} \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

On remplace $N^{-x} = e^{-x\ln(N)} = e^{-xH_N} e^{x(H_N - \ln(N))}$ où H_N désigne la N-ème somme partielle de la série harmonique, comme $H_N - \ln(N) \to \gamma$ la constante d'Euler, on a

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k}$$

Montrons que la formule

$$z \mapsto z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}$$

définit une fonction entière. Le seul point non immédiat concerne le produit, on applique le critère d'holomorphie d'un produit infini de fonctions holomorphes[1]. Soit $R > 0$, pour

1. Dans le Amar et Mathéron

$|z| < R$, on a

$$\begin{aligned}
\left|1 - \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}\right| &= \left|1 - \left(1 + \frac{z}{k}\right)\left(1 - \frac{z}{k} + O_R\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right| \\
&= \left|1 - \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) + O_R\left(\frac{1}{k^2}\right)\right| \\
&= \left|\frac{z^2}{k^2} + O_R\left(\frac{1}{k^2}\right)\right| = O_R\left(\frac{1}{k^2}\right)
\end{aligned}$$

Donc le produit étudié définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}(0, R)$, et ceci étant vrai pour tout $R > 0$, on a bien affaire à une fonction entière. Cette fonction coïncidant avec $1/\Gamma$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (qui a un point d'accumulation), on a le résultat.