Titre : **Théorème de Fourier Plancherel**
Recasages : 207,234,250
Thème : Intégration, transformée de Fourier, convolution.
Références : Rudin - Analyse réelle et complexe (p. 225)

On prend la convention suivante pour Fourier (attention : légèrement différente de celle de Rudin) : $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx$.

Théorème 1. *(Fourier Plancherel)*
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, avec $\|\widehat{f}\|_2 = 2\pi\|f\|_2$.
L'opérateur $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique à L^2 en une quasi-isométrie linéaire bijective.

On considère $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on pose

$$g(x) := f * \overline{\check{f}}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\overline{f(y-x)}dy = (f, \tau_x f)$$

où τ_x est l'opérateur de translation par x, on rappelle qu'il induit une isométrie $L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, \infty]$.
La fonction g est bien définie, comme produit scalaire de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, avec de plus $|g(x)| \leqslant \|f\|_2^2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De plus, on sait que l'application

$$\begin{array}{rccc} \tau : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R})) \\ & x & \longmapsto & \tau_x \end{array}$$

est continue, donc $x \mapsto \tau_x f$ l'est également. Comme g est définie comme la composée de cette dernière application par le produit scalaire contre f, il s'agit d'une application continue. Enfin, l'inégalité de Young nous donne que $\|g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|\overline{\check{f}}\|_1 = \|f\|_1^2$, donc $g \in L^1(\mathbb{R})$.
Ensuite, pour $\lambda > 0$, on introduit la fonction $H_\lambda : x \mapsto \frac{1}{2\pi}e^{-\lambda|x|}$, il s'agit d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, dont on peut calculer la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}
h_\lambda(\xi) := \widehat{H_\lambda}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} H_\lambda(x)e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_R e^{-\lambda|x|}e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{R_-} e^{x(\lambda-i\xi)}dx + \int_{R_+} e^{x(-\lambda-i\xi)}dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{e^{x(\lambda-i\xi)}}{\lambda-i\xi}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{x(\lambda-i\xi)}}{-(\lambda+i\xi)}\right]_{0}^{+\infty}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\lambda-i\xi} + \frac{1}{\lambda+i\xi}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{2\lambda}{\lambda^2+\xi^2} = \frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{\lambda^2+\xi^2}
\end{aligned}$$

[1]Nous montrons que la fonction h_λ est une approximation de l'unité sur $\mathbb{R}$: il s'agit d'une

1. NDLR : Évidemment, toute ressemblance avec une loi de Cauchy serait purement fortuite

fonction paire et positive, ensuite, pour $a > 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} h_\lambda(x)dx &= \frac{\lambda}{\pi}\int_a^{+\infty}\frac{1}{\lambda^2+\xi^2}d\xi \\ &= \frac{1}{\lambda\pi}\int_a^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)^2}d\xi \\ &= \frac{\lambda}{\lambda\pi}\int_{\frac{a}{\lambda}}^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}dy \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{a}{\lambda}\right)\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x)dx = 2\int_0^{\infty} h_\lambda(x)dx = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda\to 0}\int_{|x|>a} h_\lambda(x)dx = 0$$

Donc $(h_\lambda)_\lambda$ est bien une approximation de l'unité (quand $\lambda \to 0$).
Comme g est continue et bornée, la convolée $g * h_\lambda$ est bien définie et en particulier, $g * h_\lambda(0)$ converge vers $g(0) = \|f\|_2^2$. Mais par ailleurs, comme H_λ et g sont intégrables, on peut appliquer le théorème de Fubini pour avoir

$$\begin{aligned}g * h_\lambda(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x)h_\lambda(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\int_{\mathbb{R}} H_\lambda(y)e^{-ixy}dydx \\ &= \int_{\mathbb{R}} H_\lambda(y)\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ixy}dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}} H_\lambda(y)\widehat{g}(y)dy\end{aligned}$$

Mais la relation entre transformée de Fourier et convolution donne

$$\widehat{g}(x) = \widehat{f}(x)\widehat{\overline{\widetilde{f}}}(x) = \widehat{f}(x)\overline{\widehat{f}}(x) = |\widehat{f}(x)|^2$$

Comme la suite H_λ converge simplement vers $\frac{1}{2\pi}$ en croissant, le théorème de convergence dominée nous donne que $g * h_\lambda(0)$ converge vers $\frac{1}{2\pi}\|\widehat{f}\|_2^2$, ainsi $\widehat{f}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ avec $\sqrt{2\pi}\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$: la transformée de Fourier $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est bien une quasi-isométrie.

Pour le deuxième point, comme $\mathcal{F}$ est linéaire, il s'agit d'une application uniformément continue $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, comme $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ [2], et $L^2(\mathbb{R})$ est complet, la transformée de Fourier se prolonge de manière unique en une application linéaire $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ (également notée $\mathcal{F}$), qui est également une quasi-isométrie (théorème de prolongement des applications uniformément continues sur une partie dense).
Comme une quasi-isométrie est injective, il reste seulement à montrer que $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est surjective, on montre pour cela que son image est fermée est dense. Soit $\mathcal{F}(f_n) \in \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$ une suite convergeant dans $L^2(\mathbb{R})$ vers une fonction g. On a

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \|\mathcal{F}(f_n) - \mathcal{F}(f_m)\|_2 = \|\mathcal{F}(f_n - f_m)\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f_n - f_m\|$$

Comme la suite $(\mathcal{F}(f_n))$ converge, elle est de Cauchy, c'est donc aussi le cas de (f_n). Comme $L^2(\mathbb{R})$ est complet, (f_n) admet une limite f, et par continuité de $\mathcal{F}$, on a bien $\mathcal{F}(f) = g$, qui

2. Ça peut se voire en tronquant les fonctions, ou en remarquant que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ contient les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact

appartient donc à $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$.
Enfin, on montre que $Y := \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}(L^2)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, soit $f \in Y^\perp$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $x \mapsto e^{i\alpha x} H_\lambda(x)$, dont la transformée de Fourier est $\xi \mapsto h_\lambda(\xi - \alpha) = h_\lambda(\alpha - \xi) \in Y$, on a alors

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, 0 = \int_R f(\xi) h_\lambda(\alpha - \xi) d\xi = f * h_\lambda(\alpha)$$

or, comme h_λ définit une approximation de l'unité, la suite $f * h_\lambda$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$, on a donc $f = 0$ et $Y^\perp = \{0\}$, ce qui termine la preuve.