Titre : **Théorème de Féjèr**
Recasages : 209,241,246
Thème : Intégration, analyse réelle.
Références : El Amrani - Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions (p. 409)

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique, et on pose

$$\forall k \in \mathbb{Z}, e_k : t \mapsto e^{ikt} \quad \text{et} \quad c_k(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = (f, e_k)$$

ainsi que

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k, \quad C_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k, \quad u_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k, \quad \mathcal{U}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

(S_n et C_n sont respectivement la somme partielle de la série de Fourier de f, sa moyenne de Césarò).

Théorème 1. *(Féjèr) La suite de fonctions $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.*

On cherche à montrer que la suite $\|C_n - f\|_{\infty,[-\pi,\pi]}$ tends vers 0. Commençons par remarquer que

$$\begin{aligned}
S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-iks}ds e^{ikt} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} f(s)e^{ik(t-s)}ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)u_n(t-s)ds \\
&= \frac{-1}{2\pi}\int_{t+\pi}^{t-\pi} f(t-y)u_n(y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)u_n(y)dy
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
C_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)u_k(y)dy &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k(y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)\mathcal{U}_n(y)dy
\end{aligned}$$

On reconnaît presque produit de convolution (On peut le voir comme f convolée avec $\frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}\mathcal{U}_n$, ou encore comme un produit de convolution sur $\mathbb{S}^1$). Nous allons pouvoir conclure en étudiant $\mathcal{U}_n$:

Lemme 2. *La suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'identité dans le sens suivant*[1] *:*
- *$(\mathcal{U}_n)$ est une suite de fonctions positives.*
- *$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{U}_n(t)dt = 1$.*
- *$\forall \pi > \alpha > 0$, en posant $D_\alpha := [-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi]$, on a $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{D_\alpha}\mathcal{U}_n(t)dt = 0$*

1. J'insiste mais ce n'est pas une approximation de l'identité pour la convolution sur $\mathbb{R}$, il faut la multiplier par $\mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}$ pour ça, en fait $\mathcal{U}_n$ est une approximation de l'identité pour la convolution sur $\mathbb{S}^1$, ce qu'on prouve sans le dire

Démonstration. Montrons que $\mathcal{U}_n$ est toujours positive : on a ($t \in [-\pi, \pi] \setminus 0$)

$$\begin{aligned} u_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} &= \frac{e^{-int} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} \\ &= \frac{e^{it/2}}{e^{it/2}} \frac{e^{-i(n+1/2)t} - e^{i(n+1/2)t}}{e^{-it/2} - e^{it/2}} \\ &= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k(t) &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n} \Im\mathrm{m}\left(e^{i(k+1/2)t}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \Im\mathrm{m}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(k+1/2)t}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \Im\mathrm{m}\left(e^{it/2} \sum_{k=0}^{n} e^{ikt}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \Im\mathrm{m}\left(e^{it/2} \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \Im\mathrm{m}\left(e^{it/2} \frac{e^{it(n+1)/2}}{e^{it/2}} \frac{e^{-it(n+1)/2} - e^{it(n+1)/2}}{e^{-it/2} - e^{it/2}}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \Im\mathrm{m}\left(e^{it(n+1)/2} \frac{\sin\left(t\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2\left(t\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

En particulier, on a bien que $\mathcal{U}_n$ est positive ($\mathcal{U}_n(0) = n+1$), de plus, pour $\alpha \in]0, \pi[$ et $t \in D_\alpha$ on a

$$|\mathcal{U}_n(t)| \leqslant \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \leqslant \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Comme cette majoration ne dépend pas de $t \in D_\alpha$, on a bien le troisième point. Enfin, pour le second point, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{U}_n(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=-k}^{k} e_i(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=-k}^{k} \int_{-\pi}^{\pi} e_i(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} 2\pi \\ &= \frac{n+1}{n+1} = 1 \end{aligned}$$

D'où le résultat $\square$

On y est presque, on a

$$\begin{aligned}|C_n(t) - f(t)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)\mathcal{U}_n(y)dy - 1 * f(t)\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)\mathcal{U}_n(y)dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathcal{U}_n(y)dy\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-y) - f(t)|\mathcal{U}_n(y)dy\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Rappelons que comme f est continue et périodique, elle est uniformément continue :

$$\exists \alpha > 0 ||y| < \alpha \Rightarrow |f(t-y) - f(t)| \leqslant \varepsilon$$

(on peut supposer $\alpha < \pi$ quitte à le réduire), on a alors

$$|C_n(t) - f(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f\|_\infty \int_{D_\alpha} \mathcal{U}_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \varepsilon \mathcal{U}_n(y)dy \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\|f\|_\infty \int_{D_\alpha} \mathcal{U}_n(t)dt + \varepsilon\right)$$

Ce qui termine la preuve.