<u>Titre :</u> Espace de Bergman du disque unité
Recasages : 201,205,208,213,234,235,243,245
Thème : Intégration, analyse complexe, analyse hilbertienne.
Références : Charles, Mbekhta, Quéffélec (p. 124)

<u>Théorème</u> 1. *On pose $\mathbb{D} = B(0,1[$ le disque unité complexe, et*

$$H := L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$$

L'espace de Bergman du disque unité (constitué par définitions des fonctions holomorphes de carré intégrable sur $\mathbb{D}$). Il s'agit d'un espace de Hilbert (pour le produit scalaire de $L^2(\mathbb{D})$), dont une base hilbertienne est donnée par

$$\left\{ e_n := \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

On commence par montrer une inégalité 'inverse' entre norme infinie et norme L^2 : soit $f \in H$ et $z \in \mathbb{D}$, avec $d(z, \mathbb{D}^c) > r > 0$, on développe f en série entière autour de z :

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(w-z)^n$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\int_{B(z,r]} f(w)dw &= \int_{B(z,r]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z)}{n!}(w-z)^n dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(y)}{n!} \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^n e^{in\theta} \rho d\theta d\rho \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(y)}{n!} \int_0^r \rho^{n+1} d\rho \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta \\
&= f(y)\frac{r^2}{2} \times 2\pi = r^2\pi f(y)
\end{aligned}$$

Donc pour $z \in \mathbb{D}$ tel que $d(z, \mathbb{D}^c) > r > 0$, on obtient (par Cauchy Schwarz)

$$f(z) \leqslant \frac{1}{r^2\pi} \int_{B(z,r]} |f(w)|dw \leqslant \frac{1}{r^2\pi} \left(\int_{B(z,r]} |f(w)|^2 dw \right)^{1/2} \left(\int_{B(z,r]} dw \right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \|f\|_2$$

Considérons maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans H (donc pour la norme $\|.\|_2$)), pour $K \subset \mathbb{D}$ un compact, il existe $r > 0$ tel que $d(K, \mathbb{D}^c) > r$, on a alors, pour $z \in K$, $n, m \in \mathbb{N}$

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leqslant \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \|f_n - f_m\|_2$$

Donc, comme (f_n) est de Cauchy pour $\|.\|_2$, la suite est uniformément de Cauchy sur K : elle converge uniformément vers une fonction continue f sur K. On obtient donc sur $\mathbb{D}$ une limite f de la suite (f_n) holomorphe comme limite d'une suite convergeant uniformément sur tout compact.

Il faut encore montrer que $f \in L^2(\mathbb{D})$ et $(f_n) \to f$ dans $L^2(\mathbb{D})$: soit $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \geqslant N, \int_{\mathbb{D}} |f_n - f_m|^2 d\lambda < \varepsilon^2$$

En laissant $m \to \infty$ et par le Lemme de Fatou, on obtient

$$\int_{\mathbb{D}} |f_n - f|^2 d\lambda \leqslant \liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{D}} |f_n - f_m| d\lambda < \varepsilon^2$$

On obtient alors $f_n - f \in L^2(\mathbb{D})$, donc $f \in L^2(\mathbb{D})$ et de plus, $\|f_n - f\|_2 < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, d'où la convergence souhaitée : H est un espace de Hilbert.

On exhibe à présent une base hilbertienne de H : on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n := \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \quad \text{et} \quad e_n := a_n z^n$$

Commençons par montrer que $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ forme une famille orthonormale de H : soient $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
(e_p|e_q) = a_p a_q \int_{\mathbb{D}} z^p \overline{z}^q dz &= \\
&= a_p a_q \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^{p+q+1} e^{i(p-q)\theta} d\rho d\theta \\
&= a_p a_q \int_0^1 \rho^{p+q+1} d\rho \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)\theta} d\theta
\end{aligned}$$

Donc $(e_p|e_q) = 0$ si $p \neq q$, et dans le cas contraire

$$(e_p|e_p) = 2\pi a_p^2 \int_0^1 \rho^{2p+1} d\rho = 2(p+1)\frac{1}{2p+2} = 1$$

Il reste à montrer que cette famille est totale : on montre la formule de Parseval. Soit $f \in H$, on décompose f en série entière autour de 0 : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, on a alors

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dz = \int_0^1 \rho \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta d\rho$$

Fixons $\rho \in]0,1[$, on considère $S_n := \sum_{k=0}^{n} f_k z^k$ la n-ème somme partielle définissant f, on a alors

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n} f_k \rho^k e^{ik\theta} \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 \rho^{2k} d\theta$$

Car $e^{ik\theta}$ est d'intégrale non nulle sur $[0, 2\pi]$ si et seulement si k est nul. Comme $\rho \in]0,1[$ est fixé, on peut utiliser le théorème de convergence dominée qui nous donne

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} f_k \rho^k e^{ik\theta} \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 \rho^{2k} d\theta$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= \int_0^1 \rho \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 \rho^{2n} d\rho d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho \int_0^{2\pi} |f_n|^2 \rho^{2n} d\rho d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi |f_n|^2 \int_0^1 \rho^{2n+1} d\rho \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{n+1} |f_n|^2
\end{aligned}$$

En polarisant cette identité, on obtient, pour $g : z \mapsto = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n \in H$,

$$(f|g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{n+1} f_n \overline{g_n}$$

En particulier, si $g = e_n$, on obtient $(f|e_n) = \frac{\pi}{n+1} f_n a_n = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} f_n$, d'où le résultat :

$$(f|g) = \sum_{n=0}^{\infty} (f|e_n)(e_n|g)$$

Et $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est bien une base hilbertienne.