Titre : **Simplicité du groupe spécial orthogonal réel de dimension 3**
Recasages : 103,106,108,160,161,204
Thème : Topologie, théorie des groupes, algèbre linéaire.
Références : Francinou, Gianella, Nicolas - Oraux X-Ens Algèbre 3 (p.67)

Théorème 1. *Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.*

Nous ferons appel a des raisonnement sur la topologie de $SO_3(\mathbb{R})$ on rappelle que cette topologie rend la multiplication et le passage à l'inverse continues (groupe topologique).
Considérons tout d'abord $G \leqslant SO_3(\mathbb{R})$ un sous-groupe de G, on note G_0 la composante connexe par arcs dans G de $I := I_3$

Lemme 2. *L'ensemble G_0 est un sous-groupe de G.*

Démonstration. Par définition, les éléments de G_0 sont les but de chemins (continus bien-sûr) dans G partant de I :

$$g \in G_0 \Leftrightarrow \exists \gamma_g : [0,1] \to G \;\middle|\; \begin{cases} \gamma(0) = I \\ \gamma(1) = g \end{cases}$$

Commençons par dire que si $\gamma : [0,1] \to G$ est un chemin continu, alors $g.\gamma$ défini par $g.\gamma(t) = g\gamma(t)$ est aussi un chemin continu dans G, car la multiplication par g est une application continue et stabilise G.
On a $I \in G_0$ évidemment (I appartient à sa propre composante connexe par arcs).
Soit $g, g' \in G_0$, il existe γ_g et $\gamma_{g'}$ des chemins continus de G allant de I vers g et g' respectivement. Le chemin $g.\gamma_{g'}$ est un chemin continu de G, allant de $g.\gamma_{g'}(0) = g$ vers $g.\gamma_{g'}(1) = gg'$. En concaténant $g.\gamma_{g'}$ et γ_g, on obtient un chemin continu de I vers gg', qui est donc dans G.
Soit $g \in G_0$, il existe γ_g un chemin continu de I vers g dans G, en multipliant γ_g par g^{-1}, on obtient un chemin continu de g^{-1} vers $g^{-1}g = I$, donc $g^{-1} \in G_0$. □

À présent, si $G \leqslant SO_3(\mathbb{R})$ est distingué, on veut se ramener au cas où G est connexe par arcs :

Lemme 3. *Si $G \leqslant SO_3(\mathbb{R})$ est distingué, alors G_0 est également distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soient $g \in G_0$, $h \in SO_3(\mathbb{R})$, et γ_g un chemin de G allant de I vers g. Comme G est distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$, $h\gamma_g h^{-1}$ est aussi un chemin de G, allant de $hIh^{-1} = I$ vers hgh^{-1}, donc $hgh^{-1} \in G_0$ par définition. □

Lemme 4. *Soit $g \in G$, alors la composante connexe par arcs de g dans G contient tous les conjugués de g dans $SO_3(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit g un élément de G, on considère $h \neq I$ une rotation quelconque d'axe Δ et d'angle θ. Pour $t \in [0,1]$, on pose h_t la rotation d'axe Δ et d'angle $t\theta$. L'application $t \mapsto h_t$ est continue, donc l'application

$$t \mapsto h_t g h_t^{-1}$$

est un chemin de G (car celui-ci est distingué), reliant g et hgh^{-1}, d'où le résultat. □

Lemme 5. *Si G est distingué et non trivial, alors c'est aussi le cas de G_0.*

Démonstration. Pour $g \in G$, la multiplication à gauche par g induit un homéomorphisme de G sur lui-même (la réciproque étant la multiplication par g^{-1}), cet homéomorphisme permute les composantes connexes par arcs de G : il envoie G_0 sur la composante connexe par arcs de g : les composantes connexes par arcs de G sont toutes équipotentes à G_0.
Or, pour $g \notin Z(SO_3(\mathbb{R})) = \{I\}$, g possède un conjugué différent de lui-même, pour $I \neq g \in G$,la composante connexe par arcs de g dans G contient donc au moins 2 éléments. Par le lemme précédent, G_0 admet donc au moins 2 éléments. □

On peut donc se contenter de montrer que si $G \leqslant SO_3(\mathbb{R})$ est distingué, non trivial et connexe par arcs, alors $G = SO_3(\mathbb{R})$ (le cas général découlant du lemme précédent).
Si $g \in G$ est une rotation d'angle θ, sa trace est donnée par $1 + 2\cos(\theta)$, donc l'application $f : g \mapsto \cos(\theta) = \frac{tr(g)-1}{2}$ est continue. Soit $I \neq g \in G$, quitte à remplacer g par g^{-1}, on peut supposer qu'une mesure de l'angle θ de g se trouve dans $]0, \pi]$, si $\theta < \pi/2$, on remplace g par une puissance de g de sorte à avoir $\theta \in]\pi/2, \pi]$ et $\cos(\theta) \leqslant 0$. Par continuité de f, et comme $f(I) = 1$, il existe $r \in G$ telle que $f(r) = 0$ (car G est connexe), donc d'angle $\pm\pi/2$. La rotation r^2 est alors d'angle π.
Or, les rotations d'angle π sont les retournements de $SO_3(\mathbb{R})$, ceux-ci sont conjugués entre eux, et donc G contient les retournements, qui engendrent $SO_3(\mathbb{R})$, d'où le résultat.