Titre : Isomorphismes exceptionnels
Recasages : 101, 103, 104, 106, 183, 190
Thème : Groupes, actions de groupes, algèbre linéaire.
Références : Perrin - Cours d'algèbre (p.105)

Théorème 1. *On a les isomorphismes de groupes suivants :*

(a) $Gl_2(\mathbb{F}_2) = Sl_2(\mathbb{F}_2) = PSl_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$

(b) $PGl_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ *et* $PSl_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$

(c) $PGl_2(\mathbb{F}_4) = PSl_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$

(d) $PGl_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$ *et* $PSl_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$.

On pose $q = p^n$ une puissance d'un nombre premier. En dénombrant les bases on obtient $|Gl_2(\mathbb{F}_q)| = (q^2-1)(q^2-q)$, comme le centre de $Gl_2(\mathbb{F}_q)$ est en bijection avec $\mathbb{F}_q^*$, on trouve $|PGl_2(F_q)| = q(q^2-1)$, qui est aussi l'ordre de $Sl_2(\mathbb{F}_q)$ (car $Gl_2(\mathbb{F}_q)/Sl_2(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{F}_q^*$).

De manière générale, le groupe $Gl(E)$ agit sur $P(E)$ l'espace des droites vectorielles de E. Le noyau de cette action est $Z(Gl(E))$, donc $PGl(E)$ opère sur $P(E)$, et ce fidèlement.
On notera $P^1(\mathbb{F}_q) = P(\mathbb{F}_q^2)$ (la droite projective sur $\mathbb{F}_q$). L'espace vectoriel $\mathbb{F}_q^2$ possède q^2-1 éléments non nuls, et toute droite vectorielle contient $|\mathbb{F}_q^*| = q-1$ éléments, donc $P^1(\mathbb{F}_q)$ possède $\frac{q^2-1}{q-1} = q+1$ éléments. On obtient donc un morphisme de groupes injectif

$$\varphi : PGl_2(\mathbb{F}_q) \to \mathfrak{S}_{q+1}$$

(a) Si $q = 2$, $\mathbb{F}_2^* = \{1\}$, l'identité est donc la seule homothétie de $\mathbb{F}_2^2$. Donc $PGl_2(\mathbb{F}_2) = Gl_2(\mathbb{F}_2)$ et $PSl_2(\mathbb{F}_2) = Sl_2(\mathbb{F}_2)$. De plus comme $(q^2-1)(q^2-q) = q(q^2-1) = 6$, on a $Sl_2(\mathbb{F}_2) = Gl_2(\mathbb{F}_2)$. Et ce groupe s'injecte dans $\mathfrak{S}_3$, lui aussi d'ordre 6, d'où l'isomorphisme.

(b) Ici, $q = 3$, donc $PGl_2(\mathbb{F}_3)$ est d'ordre $3(9-1) = 24$, et ce groupe s'injecte dans $\mathfrak{S}_4$, lui aussi d'ordre 24, d'où le premier isomorphisme. Comme toutes les homothéties de $Gl_2(\mathbb{F}_3)$ sont de déterminant 1, $PSl_2(\mathbb{F}_3)$ se voit comme un sous-groupe d'indice 2 de $PGl_2(\mathbb{F}_3)$, d'où le second isomorphisme.

(c) Si $q = 4$, il n'y a pas d'éléments d'ordre 2 dans $\mathbb{F}_4^* \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, donc $PSl_2(\mathbb{F}_4) = Sl_2(\mathbb{F}_4)$ d'ordre 60, qui est aussi l'ordre de $PGl_2(\mathbb{F}_4)$. Donc $PSl_2(\mathbb{F}_4) = PGl_2(\mathbb{F}_4)$ par inclusion, et ceci est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_5$, d'indice 2 donc distingué : c'est $\mathfrak{A}_5$.

(d) Pour $q = 5$, on a un $|PGl_2(\mathbb{F}_5)| = 120$, l'image du morphisme $PGl_2(\mathbb{F}_5)$ est donc un sous-groupe d'indice 6 de $\mathfrak{S}_6$. Donc isomorphe à $\mathfrak{S}_5$ (résultat général, qu'on montre juste après), ensuite, on a $Z(Sl_2(\mathbb{F}_5))$ possède deux éléments (car $\mathbb{F}_5^* \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ possède un élément d'ordre 2), donc $PSl_2(\mathbb{F}_5)$ est d'indice 2 dans $PGl_2(\mathbb{F}_5)$, donc isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

On doit montrer le résultat affirmé sur $\mathfrak{S}_n$:

Lemme 2. *Soit $n \geqslant 2$, tout sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.*

Démonstration. Soit $H \leqslant \mathfrak{S}_n$ un sous-groupe d'indice n. Le résultat se vérifie à la main pour $n \leqslant 3$. Pour $n = 4$, alors H est d'ordre 6, donc isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ ou cyclique, mais $\mathfrak{S}_4$ ne contient pas d'éléments d'ordre 6, donc H n'est pas cyclique, et donc il est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Pour $n \geqslant 5$, on fait agir $\mathfrak{S}_n$ par translation sur l'ensemble quotient $X = \mathfrak{S}_n/H$, on obtient un morphisme de groupes $\varphi : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$, pour $x \in \mathfrak{S}_n$, et $gH \in X$, on a

$$x.gH = gH \Leftrightarrow g^{-1}xgH = H \Leftrightarrow x \in gHg^{-1}$$

donc $\text{Ker } \varphi = \bigcap_{g \in \mathfrak{S}_n} gHg^{-1} \subset H$. Comme $n > 2$, on obtient

$$|\text{Ker } \varphi \leqslant (n-1)! < \frac{n!}{2} = |\mathfrak{A}_n|$$

Comme $n \geqslant 5$, on obtient $\text{Ker } \varphi = \{Id\}$, car il s'agit d'un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$, d'ordre strictement inférieur à celui de $\mathfrak{A}_n$, donc φ est injectif.
Enfin, comme pour $h \in H$, on a $h.H = hH = H$, on a

$$\varphi(H) \subset \{\sigma \in \mathfrak{S}(X) \mid \sigma(H) = H\} \simeq \mathfrak{S}(X \setminus \{H\}) \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$$

et on a isomorphisme pour des raisons de cardinalité. $\square$