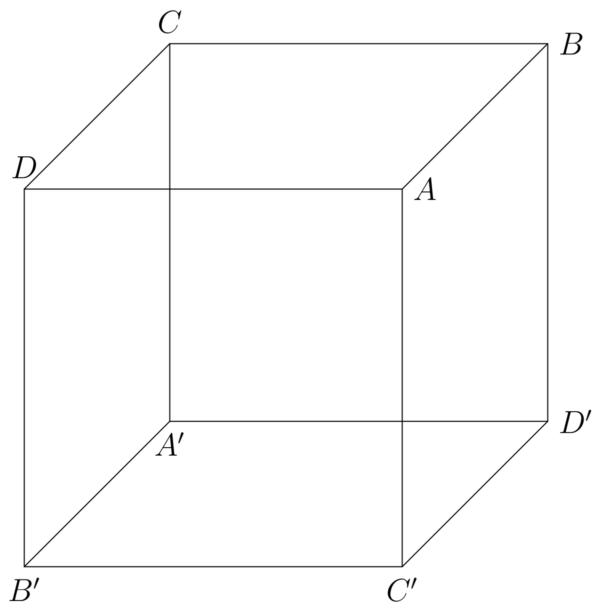
<u>Titre :</u> Groupe d'isométrie du Cube régulier
Recasages : 101,104,105,181,191
Thème : Actions de groupes, géométrie euclidienne.
Références : Caldero, Germioni, H2G2 (tome 1) (p. 364)

On considère K un cube régulier de $\mathbb{R}^3$, quitte à le translater, on peut le supposer centré en 0. On note G (resp. G^+) le groupe des isométries (resp. directes) de $\mathbb{R}^3$ qui fixent K.

<u>Théorème</u> 1. *On a $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_4$ et $G^+ \simeq \mathfrak{S}_4$. De plus, les sous-groupes de Sylow de G^+ se réalisent comme stabilisateurs de certaines droites remarquables de K.*

Fixons d'abord les notations, on numérote les sommets de notre cube de la façon suivante :



On note ainsi $\Delta := \{\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_D\}$ l'ensemble des grandes diagonales de notre cube (on fera volontiers l'amalgame entre un segment non trivial et l'unique droite qui le contient).
Le groupe G étant constitué d'isométries affines, son action conserve les points extremaux, ici les sommets de K. De plus, comme quatre sommets distincts de K forment un repère affine de $\mathbb{R}^3$, une application affine est entièrement déterminée par son action sur les sommets de K (en particulier, les actions de G et G^+ sur les sommets de K sont toutes deux fidèles).
Les segments diagonaux sont les segments de plus grande longueur dans K, comme les éléments de G sont des isométries affines, l'image d'un segment diagonal par un élément de G est un segment, lui aussi diagonal. Ainsi, G agit sur Δ, d'où un morphisme $\varphi : G \to \mathfrak{S}_4$.

Calculons le noyau de φ : Soit $f \in \operatorname{Ker} \varphi$, comme $[AA'] = f([AA']) = [f(A), f(A')]$, on a $f(A) \in \{A, A'\}$ (de même, $f(B) \in \{B, B'\}$, etc...).

- Si $f(A) = A'$, on remarque que f permute les arêtes de K (f est une isométrie affine), donc $f(B) = B'$, le seul sommet entre B et B' à partager une arête avec $f(A) = A'$. De même de proche en proche, on obtient $f(C) = C'$ et $f(D) = D'$. L'action de f sur les sommets est celle de $-Id_{\mathbb{R}^3}$, donc $f = -Id_{\mathbb{R}^3}$.
- De même, si $f(A) = A$, alors $f(B) = B$, $f(C) = C$ et $f(D) = D$, on a alors $f = Id_{\mathbb{R}^3}$.

Le noyau de φ est alors donné par $\{\pm Id_{\mathbb{R}^3}\}$, en particulier, l'action de G^+ sur Δ est fidèle.

Montrons que φ est surjectif. Il suffit de montrer que les permutations $(\Delta_A\ \Delta_B)$ et $(\Delta_A\ \Delta_B\ \Delta_C\ \Delta_D)$ sont atteintes (elles engendrent $\mathfrak{S}_4$).

- On pose $P = (DCD')$ le plan contenant les droites Δ_D et Δ_C, et f la symétrie orthogonale de plan P, elle permute les couples de points (A, B') et (A', B), d'où $\varphi(f) = (\Delta_A\ \Delta_B)$.
- On pose D_1 la droite passant par les milieux des faces $ABCD$ et $A'B'C'D'$, et g la rotation d'axe D_1 et d'angle $\pi/2$, on a bien $\varphi(g) = (\Delta_A\ \Delta_B\ \Delta_C\ \Delta_D)$

Nous avons donc une suite exacte courte $\{\pm 1\} \hookrightarrow G \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{S}_4$ nous montrons qu'elle est scindée à droite : Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, σ admet deux antécédents f_1 et f_2 par φ, avec $f_2 = -f_1$. L'un exactement de ces antécédents est une isométrie directe, on pose $\psi(\sigma)$ cet antécédent. On obtient une application $\psi : \mathfrak{S}_4 \to G$, qui est un morphisme de groupes, en effet, pour $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_4$, $\psi(\sigma)\psi(\sigma')$ est une isométrie directe, avec

$$\varphi(\psi(\sigma)\psi(\sigma')) = \varphi(\psi(\sigma))\varphi(\psi(\sigma')) = \sigma\sigma'$$

donc $\psi(\sigma)\psi(\sigma') = \psi(\sigma\sigma')$ par définition de ψ, qui est donc un inverse à droite de φ : on a $G \simeq \{\pm 1\} \rtimes \psi(\mathfrak{S}_4)$, mais $\psi(\mathfrak{S}_4)$ est d'indice 2 dans G, donc distingué, d'où $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_4$ (le produit est direct).
De plus par construction, $\psi(\mathfrak{S}_4)$ est un sous-groupe d'indice 2 de G, formé d'isométries directes : c'est G^+, qui est donc isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

On sait à présent que G^+, comme groupe d'ordre 24, admet 1 ou 3 2-Sylow (d'ordre 8) et 1 ou 4 3-Sylow (d'ordre 3).
Considérons l'action de G^+ sur K et H le sous-groupe des éléments fixant ponctuellement la droite Δ_A. Une isométrie directe fixant ponctuellement Δ_A est une rotation d'axe Δ_A, compte tenu que l'image de D doit être B ou C', il ne reste que les angles $2\pi/3$ et $4\pi/3$: H admet trois éléments et est un 3-Sylow de G^+. Le même raisonnement sur les autres grandes diagonales nous donne 3 autres 3-Sylow.
Pour les 2-Sylow, on considère D_1, D_2, D_3 les droites passant par les milieux des faces opposées de K. Le groupe G^+ agit sur ces droites, de façon transitive, donc le stabilisateur d'une droite est un sous-groupe d'ordre $24/3 = 8$ (lemme des orbites) : c'est un 2-Sylow de G^+, qui en a donc 3.