Titre : Table de $\mathfrak{S}_4$ par Burnside et double transitivité
Recasages : 101,104,105,107,190
Thème : Représentations des groupes
Références : Pour cette méthode, juste `https://agreg-maths.fr/developpements/824`

On fixe dans la suite un groupe fini G agissant sur un ensemble fini X. Commençons par prouver la formule de Burnside :

Proposition 1. *(Formule de Burnside)*
On pose, pour g dans G, $X_g := \{x \in X \mid g.x = x\}$. On a alors

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$$

Où X/G désigne l'ensemble des orbites de X sous l'action de G.

Démonstration. On considère l'ensemble

$$R = \{(g, x) \in G \times X \mid g.x = x\}$$

On à d'un côté $|R| = \sum_{g \in G} |X_g|$, et d'un autre

$$\begin{aligned} |R| &= \sum_{x \in X} |G_x| \\ &= \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|\mathcal{O}_G(x)|} \\ &= |G| \sum_{\mathcal{O} \in X/G} \sum_{x \in \mathcal{O}} \end{aligned}$$

Mais la somme $\sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{1}{|\mathcal{O}|}$ contient $|\mathcal{O}|$ termes identiques : elle vaut $\frac{|\mathcal{O}|}{|\mathcal{O}|} = 1$, d'où

$$\begin{aligned} &= |G| \sum_{\mathcal{O} \in X/G} 1 \\ &= |G||X/G| \end{aligned}$$

Ce qui clos la démonstration. $\square$

On s'intéresse à présent au cas où G agit doublement transitivement sur X, on pourra alors en déduire une représentation complexe irréductible de G.

Définition 2. On dit que G agit ***doublement transitivement*** sur X si, pour quatre éléments x, x', y, y' de X, avec $x \neq x'$ et $y \neq y'$, il existe $g \in G$ tel que $g.x = y$ et $g.y = y'$.

On pose $n := |X|$, et on considère $V := \mathbb{C}^n$, muni d'une base indexée par X : $(e_x)_{x \in X}$. Cette indexation induit une action de G sur V, définie par

$$\forall x \in X, \ g.e_x := e_{g.x}$$

et étendue par linéarité. Quel est le caractère associé à cette représentation : pour $g \in G$, la matrice $M = (m_{x,y})_{x,y \in X}$ associèe à G ne contient que des 1 et des 0, avec

$$m_{x,x} = 1 \Leftrightarrow g.e_x = e_x = e_{g.x} \Leftrightarrow x \in X_g$$

d'où $\chi(g) = \mathrm{tr}(M) = |X_g|$.

Cependant, la représentation V n'est pas irréductible à priori, considérons $d = \sum_{x \in X} e_x$, on a

$$g.d = \sum_{x \in X} g.e_x = \sum_{x \in X} e_{g.x} = d$$

car l'action g induit une bijection $X \to X$, donc $\mathrm{Vect}(d) =: D$ est un sous $\mathbb{C}G$-module de V, par le théorème de Maschke, il admet un supplémentaire $D \oplus V_0 = V$, avec, par additivité des caractères $\chi_{V_0}(g) = \chi_V(g) - \chi_D(g) = |X_g| - 1$.

Proposition 3. *La représentation V_0 est irréductible.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\langle \chi_{V_0} | \chi_{V_0} \rangle = 1$, avec

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{V_0} | \chi_{V_0} \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi_{V_0}(g)|^2 \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (|X_g| - 1)^2 \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|^2 - \frac{2}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g| + \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} 1
\end{aligned}$$

Le dernier terme est clairement égal à 1, le deuxième terme est égal à $-2|X/G| = -2$ par la formule de Burnside. Il reste à étudier le premier terme, c'est là qu'intervient la double transitivité.

L'action de G sur X induit une action de G sur $X \times X$, donnée par $g.(x, y) := (g.x, g.y)$, la double transitivité nous apprends que cette dernière action possède deux orbites :

$$\Delta_X = \{(x, x), x \in X\} \quad \text{et} \quad X \times X \setminus \Delta_X$$

Par ailleurs, on a pour $g \in G$.

$$(X \times X)_g = \{(x, y) \in X \mid g.x = x \text{ et } g.y = y\} = X_g \times X_g$$

donc $|(X \times X)_g| = |X_g|^2$ et le premier terme du calcul précédent vaut bien 2 par la formule de Burnside, d'où $\langle \chi_{V_0} | \chi_{V_0} \rangle = 1$ et le résultat. □

On peut maintenant (enfin) passer au cas précis de $\mathfrak{S}_4$: celui-ci agit doublement transitivement sur $\{1, 2, 3, 4\}$, on en déduit une représentation irréductible de degré $4 - 1 = 3$, dont le caractère est ultra facile à calculer : (1 2) fixe deux éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$, donc son caractère vaut $2 - 1 = 1$ et ainsi de suite, on a obtenu la table de caractère suivante :

$\mathfrak{S}_4$	1	(1 2)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 2 3 4)
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ_{V_0}	3	1	-1	0	-1
?					
?					

(la deuxième ligne est la représentation par signature). On sait également que le produit d'une représentation irréductible par une représentation irréductible de degré 1 est encore irréductible, le produit de χ_{V_0} par ε donne une autre représentation irréductible :

$\mathfrak{S}_4$	1	(1 2)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 2 3 4)
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ_{V_0}	3	1	-1	0	-1
$\varepsilon\chi_{V_0}$	3	-1	-1	0	1
?					

Il ne manque plus qu'un caractère, qu'on retrouve par la deuxième formule d'orthogonalité des caractères

Proposition 4. *Soient $Irr(G)$ l'ensemble des caractères irréductibles de G, C_i et C_j deux classes de conjugaisons de G, on a*

$$\sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(C_i)\overline{\chi(C_j)} = \delta_{i,j}\frac{|G|}{|C_i|}$$

Nommons χ le caractère manquant, sur la classe de 1, on obtient

$$1 + 1 + 9 + 9 + \chi(1)^2 = 24$$

donc $\chi(1) = 2$, et ainsi de suite de proches en proches :

$\mathfrak{S}_4$	1	(1 2)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 2 3 4)
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ_{V_0}	3	1	-1	0	-1
$\varepsilon\chi_{V_0}$	3	-1	-1	0	1
χ	2	0	2	-1	0