Titre : Équation de Hill-Mathieu

Recasages : 220,221

Thème : Équations différentielles, analyse réelle

Références : Zuily, Quéffélec, Analyse pour l'agrégation (p. 410)

On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + qy = 0 \tag{1}$$

où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction continue, paire, et π-périodique. Les solutions (à valeurs complexes) de cette équation forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2, que l'on note W, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on peut identifier W à $\mathbb{C}^2$ en associant $(y(0), y'(0))$ à une solution y. Une base de W est donc donnée par les solutions y_1 et y_2 de 1 telles que

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$$

On remarque que, comme q est à valeurs réelles, c'est aussi le cas de y_1 et y_2.

Ensuite, pour y une solution de 1, on a

$$(\tau_{-\pi} y)'' + q(\tau_{-\pi} y) = \tau_{-\pi} y'' + \tau - \pi(qy) = \tau_{-\pi}(y'' + qy) = 0$$

(en effet, $\tau_{-\pi} q = q$ car q est π-périodique) [1]

Ainsi, $\tau_{-\pi}$ induit un endomorphisme de W, dont on note A la matrice, on a donc

$$A = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$$

Lemme 1. *(a) Les solutions y_1 et y_2 sont respectivement paire et impaire.*

(b) $\det A = 1$

(c) On a $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$

Démonstration. Comme q est paire, on remarque que

$$(\check{y_1}'' + q\check{y_1})(t) = \check{y_1''}(t) + q(t)y_1(-t) = y_1''(-t) + q(-t)y_1(-t) = 0$$

donc $\check{y_1}$ est aussi une solution, telle que $(y_1(0), y_1'(0)) = (1, 0)$ d'où $\check{y_1} = y_1$ par l'unicité dans Cauchy-Lipschitz. On montre de même que $\check{y_2}$ est une solution telle que $(y_2(0), y_2'(0)) = (0, -1)$, d'où $\check{y_2} = -y_2$.

Ensuite, en notant w le wronskien de y_1 et y_2, on a

$$\begin{aligned} w' = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' \\ &= -y_1 q y_2 + q y_1 y_2 = 0 \end{aligned}$$

Donc le wronskien est constant égal à $w(1) = 1$, donc $\det A = w(\pi) = 1$.

La réciproque de $\tau_{-\pi}$ est évidemment τ_π, donc la matrice est

$$B = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & -y_2(\pi) \\ -y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$$

Or, on sait que A^{-1} est donnée par

$$\frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} y_2'(\pi) & -y_2(\pi) \\ -y_1'(\pi) & y_1(\pi) \end{pmatrix}$$

d'où $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$ car $A^{-1} = B$. $\square$

1. Rappelons que $\tau_a f(x) := f(x - a)$

Proposition 2. *On note $T = \mathrm{tr}A = y_1(\pi) + y_2'(\pi)$.*

(a) Si $|T| < 2$, toutes les solutions de 1 sont bornées.

(b) Si $|T| = 2$, 1 admet une solution non nulle bornée.

(c) On a $|T| = 2$ si et seulement si $y_1'(\pi)y_2(\pi) = 0$.

(d) Si $|T| > 2$, toutes les solutions non triviales de 1 sont non bornées.

Démonstration. On commence par noter que, comme y_1 et y_2 sont à valeurs réelles, c'est aussi le cas de T. Ensuite, on remarque de le polynôme caractéristique de A est donné par

$$\chi_A(X) = X^2 - TX + 1$$

donc $\Delta = \Delta(\chi_A) = T^2 - 4$.
(a) Si $|T| < 2$, on a $\Delta < 0$, donc χ_A admet deux racines complexes conjuguées $\rho, \overline{\rho}$. La matrice A est ainsi diagonalisable, il existe une (u, v) une base de W telle que

$$\tau_{-\pi}u = \rho u \quad \text{et} \quad \tau_{-\pi}v = \overline{\rho}v$$

Comme $1 = \rho\overline{\rho} = |\rho|^2$, les fonctions $|u|$ et $|v|$ sont continues et π-périodiques, donc u et v sont bornées.
(b) Si $|T| = 2$, on a $\Delta = 0$, et χ_A admet une racine réelle double r, égale à ± 1 (car $r^2 = 1$). Ainsi, A admet une valeur propre : une solution u non triviale telle que $\tau_{-\pi}u = ru$: u est donc bornée.
(c) Comme $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$, on a $|T| = 2$ si et seulement si $y_1(\pi) = y_2'(\pi) = \pm 1$, ce qui équivaut à $y_1(\pi)y_2'(\pi) = 1$ i.e $y_1'(\pi)y_2(\pi) = 0$ car $\det A = 1$.
Enfin, si $|T| > 2$, χ_A admet deux racines réelles r et r' avec $rr' = \det A = 1$, on a donc $r' = r^{-1}$. Quitte à les échanger, on suppose $|r| > 1 > |r'|$.
Soit maintenant (u, v) une base de diagonalisation de A, une solution y non triviale de 1 s'écrit

$$au + bv, (a, b) \neq (0, 0)$$

- Si $a \neq 0$, et $x \in \mathbb{R}$ n'annule pas u, alors $y(x + n\pi) = ar^n u(x) + br^{-n}v(x)$, qui tends vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
- Si $a = 0$, alors $b \neq 0$ et si $x \in \mathbb{R}$ n'annule pas v, on a $y(x - n\pi) = br^n v(x)$ qui tend également vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

□

Remarque 3. On peut illustrer ces résultats par les équations $y'' + y = 0$ et $y'' - y = 0$, dont les solutions élémentaires sont $\cos, \sin$ et ch, sh.