<u>Titre :</u> Équation de la chaleur sur le cercle.
Recasages : 222,235,239,241,246
Thème : Intégration, séries de Fourier.
Références : Candelpergher - Calcul intégral (p. 401)

On pose $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, pour $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$, on considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = 0 & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T} \\ u(0,.) = u_0 & \text{dans } L^2(\mathbb{T}) \end{cases} \tag{1}$$

<u>Théorème</u> 1. *Il existe une unique fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}$, solution à l'équation $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$, avec $u(t,.)$ tendant vers u_0 dans $L^2(\mathbb{T})$ quand t tend vers 0.*

On raisonne par analyse synthèse : soit u une solution comme annoncée, pour $t > 0$ fixé, la fonction $u(t,.)$ est de classe $\mathbb{C}^1$, on peut donc considérer sa série de Fourier, qui converge normalement

$$\forall t > 0, x \in \mathbb{T}, u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx} \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)e^{-inx}dx$$

On voit $c_n(t)$ comme une fonction de t : comme $(t,x) \mapsto u(t,x)e^{-inx}$ est de classe $\mathbb{C}^1$ en t, et qu'on intègre sur le segment $[0,2\pi]$, par dérivation sous l'intégrale, on a $c_n'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_t u(t,x)e^{-inx}dx$. Par intégration par parties et périodicité de $u(t,.), \partial_t u(t,.)$, on a

$$\begin{aligned} c_n'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_{xx} u(t,x)e^{-inx}dx &= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\partial_x u(t,x)e^{-inx}\right]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} \partial_x u(t,x)e^{-inx}dx\right) \\ &= \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_x u(t,x)e^{-inx}dx \\ &= \frac{in}{2\pi}\left(\left[u(t,x)e^{-inx}\right]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} u(t,x)e^{-inx}dx\right) \\ &= \frac{-n^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)e^{-inx}dx = -n^2 c_n(t) \end{aligned}$$

Donc $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$ (solution d'équation différentielle) pour un $c_n^0 \in \mathbb{R}$. Les coefficients de Fourier d'une fonction $L^2(\mathbb{T})$ donnent un isomorphisme isométrique avec $\ell^2(\mathbb{T})$ (formule de Parseval), donc pour avoir $u(t,.) \to u_0$ dans $L^2(\mathbb{T})$, il suffit d'avoir convergence de $(c_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ vers $(c_n(u_0))_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\ell^2(\mathbb{T})$, on a donc $c_n^0 = c_n(u_0)$ (car $(c_n(t))$ converge déjà vers c_n^0 simplement). On peut donc écrire

$$\begin{aligned} u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u_0)e^{-n^2t}e^{inx} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(y)e^{-iny}dy e^{-n^2t}e^{inx} \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} u_0(y)e^{-iny}e^{-n^2t}e^{-inx}dy \\ &= \int_0^{2\pi} u_0(y)\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in(x-y)}e^{-n^2t}dy \\ &= \int_0^{2\pi} u_0(y)K(t,x-y)dy \end{aligned}$$

Où $K : (t,x) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}e^{-n^2t}$ est le noyau de la chaleur. Nous avons notre candidat, passons à présent à la synthèse : étudions rapidement le noyau de la chaleur. On pose $K_n(t,x) := \frac{1}{2\pi}e^{-n^2t}e^{inx}$ pour avoir $K = \sum_{n\in\mathbb{Z}} K_n$. Pour $n \in \mathbb{Z}, k, l \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l} K_n(t,x)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}(-n^2)^k (in)^l e^{-n^2t}e^{inx}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} n^{2k+l} e^{-n^2 a}$$

pour $t > a > 0$. Ce dernier terme est sommable sur $\mathbb{Z}$, par dérivation sous intégrale, $K(t,x)$ est une fonction $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}$, avec de plus $\partial_t K = \partial_{xx} K$.
Ensuite, u s'écrit comme l'intégrale à paramètre :

$$u(t,x) = \int_0^{2\pi} u_0(y) K(t, x-y) dy$$

L'intégrand est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en t et en x, avec, pour $t > a > 0$

$$\left|\frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l} u_0(y) K(t, x-y)\right| \leqslant C|u_0(y)|$$

où $C = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} n^{2k+l} e^{-n^2 a}$ (c'est notre majoration de $\frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l} u_0(y) K$ qui revient). Le membre de droite est intégrable sur $[0, 2\pi]$ car $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$, donc u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, +\infty[\times\mathbb{T}$ pour tout $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}$. De plus, u vérifie bien l'équation de la chaleur.
Il reste la condition au bord, par la formule de Parseval, il suffit de montrer que $\|c_n(u(t,.)) - c_n(u_0)\|_2$ tends vers 0 quand t tends vers 0, or on a

$$\|c_n(u(t,.)) - c_n(u_0)\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(u_0) - c_n(u_0)e^{-n^2t}|^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(u_0)|^2 |1 - e^{-n^2t}|^2$$

Comme $|1 - e^{-n^2t}|^2 \leqslant 1$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on peut appliquer la convergence dominée qui donne alors le résultat voulu.