Titre : **Nombres de Bell**
Recasages : 190,230,243
Thème : Séries entières, dénombrement
Références : Francinou, Gianella, Nicolas - Oraux X-Ens Algèbre 1 (p. 14)

Théorème 1. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ avec la convention $B_0 := 1$. On a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$$

On commence par montrer la relation de récurrence suivante sur les nombres de Bell :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Soit en effet $n \in \mathbb{N}$, on note, pour $k \leqslant n$ E_k l'ensemble des partitions de $[\![1, n+1]\!]$ telles que la partie contenant $n+1$ soit de cardinal $k+1$, il existe $\binom{n}{k} B_{n-k}$ telles partitions (en effet, il existe $\binom{n}{k}$ parties de $[\![1, n+1]\!]$ de cardinal $k+1$ contenant $n+1$, et il existe B_{n-k} partitions des $n-k$ entiers restants). Comme les ensembles E_k (pour $k \in [\![0, n]\!]$) forment une partition de l'ensemble des partitions de $[\![1, n+1]\!]$, on a alors

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} |E_k| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

À présent, nous nous penchons sur la série entière

$$\sum \frac{B_n}{n!} z^n$$

dont nous notons f la somme. On montre que $B_n \leqslant n!$ pour $n \in \mathbb{N}$ par récurrence sur n : le cas $n = 0$ est immédiat, ensuite, on a

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \leqslant n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leqslant n!$$

Donc la suite $\frac{B_n}{n!}$ est bornée. La série entière considér'e a donc un rayon de convergence $R \geqslant 1$. Calculons la dérivée de f :

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} z^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_k}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} z^k \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \\
&= f(z) e^z
\end{aligned}$$

Ainsi, $f_{|\mathbb{R}}$ est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = e^x y \\ y(0) = f(0) = 1 \end{cases}$, et donc $f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z} = e^{e^z - 1}$. Or, on a

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{n!k!}$$

On cherche à appliquer le théorème de Fubini sur cette double somme, pour cela, on montre la sommabilité de la double suite $\frac{(nz)^k}{n!k!}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(nz)^k}{n!k!} \right| &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|nz|^k}{n!k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|nz|^k}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{|nz|} \\ &= e^{e^{|nz|}} < \infty \end{aligned}$$

D'où, par le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{n!k!} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{n!k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} \right) z^k \end{aligned}$$

On obtient alors, par unicité du prolongement analytique :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} = B_k$$