french

<u>Titre :</u> Abel angulaire et Taubérien faible.

Recasages : 207,230,235,241,243

Thème : Séries entières, limites.

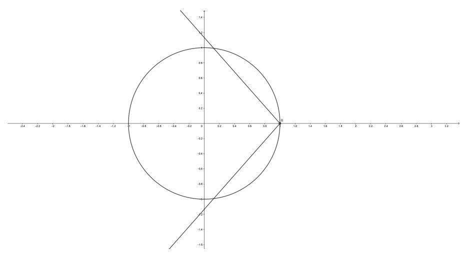
Références : Gourdon analyse (p.252-254)

<u>Théorème</u> 1. *(Abel angulaire)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que $\sum a_n$ converge vers une limite ℓ. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité (ouvert). On fixe $\theta_0 \in [0, \pi/2[$ et on pose

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{D} \mid \exists \rho > 0, \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \mid z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$$

(voir figure ci-dessous). On a alors

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \ell$$



Je le dis tout de suite, le principal argument est une transformée d'Abel. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, et $R_n = \ell - S_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $a_n = R_{n-1} - R_n$ pour tout n. Pour $z \in \mathbb{D}$, et $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^N a_n z^n\right) - S_n &= \sum_{n=0}^N (R_{n-1} - R_n) z^n - \sum_{n=0}^N (R_{n-1} - R_n) \\
&= \sum_{n=1}^N (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^N R_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_n (z^N - 1) \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1)
\end{aligned}$$

En laissant $N \to \infty$, on obtient $f(z) - \ell = (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n$. Fixons maintenant $\varepsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| < \varepsilon$ pour tout $n > N$. Pour $z \in \mathbb{D}$, on a alors

$$|f(z) - \ell| \leqslant |z-1| \left|\sum_{n=0}^N R_n z^n\right| + \varepsilon |z-1| \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |z|^n\right) \leqslant |z-1| \left(\sum_{n=0}^N |R_n|\right) + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}$$

Pour $z \in \Delta_{\theta_0}$ écrit sous la forme $1-\rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $|\theta| \leqslant \theta_0$. On a $|z|^2 = 1-2\rho\cos\theta+\rho^2$, et si $\rho \leqslant \cos\theta_0$, on a la majoration

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) = \frac{\rho}{2\rho\cos\theta-\rho^2}(1+|z|) \leqslant \frac{2}{2\cos\theta-\rho} \leqslant \frac{2}{\cos\theta_0}$$

À présent, si $\alpha > 0$ est tel que $\alpha\sum_{n=0}^{n}|R_n| < \varepsilon$, on voit que si $z \in \Delta_{\theta_0}$ et $|z-1| \leqslant \inf\{\alpha, \cos\theta_0\}$, on déduite que

$$|f(z)-\ell| \leqslant \varepsilon + \varepsilon\frac{2}{\cos\theta_0}$$

d'où le résultat.

Théorème 2. *(Taubérien faible)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série sur $\mathbb{D}$ le disque unité. On suppose que la limite

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$$

existe et vaut $\ell \in \mathbb{C}$. Si $a_n = o(1/n)$, alors la série $\sum a_n$ converge vers ℓ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x \in]0,1[, \quad S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$$

et comme $(1-x^k) = (1-x)\sum_{i=0}^{k-1} x^i \leqslant k(1-x)$ pour $0 < x < 1$, on en déduit

$$|S_n - f(x)|` \leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k|a_k|}{n}x^k \leqslant (1-x)M_n + \frac{\sup_{k>n} k|a_k|}{n(1-x)}$$

où M désigne un majorant de $(k|a_k|)_k$. Fixons à présent $1 > \varepsilon > 0$. L'inégalité précédente entraîne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|S_n - f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leqslant M\varepsilon + \frac{\sup_{k>n} k|a_k|}{\varepsilon}$$

Donc en choisissant N_0 tel que $\sup_{k>N_0} k|a_k| < \varepsilon^2$ (possible car $(ka_k)_k$ tend vers 0), on en déduit

$$\forall n \geqslant N_0, \left|S_n - f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leqslant M\varepsilon + \varepsilon$$

Par hypothèse, $f(x)$ tends vers ℓ quand $x \to 1^-$, donc il existe $N_1 \geqslant N_0$ tel que $f(1-\varepsilon/n) - S| < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N_1$. Ainsi,

$$\forall n \geqslant N_1, \quad |S_n - \ell| \leqslant \left|S_n - f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)\right| + \left|f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)-\ell\right| \leqslant (M+1)\varepsilon + \varepsilon$$

Donc (S_n) converge vers ℓ, d'où le résultat.