<u>Titre :</u> Méthode de Newton
Recasages : 223,226,228,229
Thème : Analyse réelle. Analyse numérique
Références : Rouvière - Petit guide du calcul différentiel (p. 142)

<u>Théorème</u> 1. *Soient $a < b$ des réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$, et $f' > 0$ sur $[a, b]$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \phi(x_n) := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

et $x_0 \in [a, b]$.
La fonction f admet un unique zéro $\alpha \in]a, b[$, et on a

(a) Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour $x_0 \in I :=]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quadratiquement vers α, et il existe $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - \alpha| \leqslant C|x_n - \alpha|^2 \tag{1}$$

(b) Si de plus, $f'' > 0$ sur $[\alpha, b]$, alors pour $x \in [\alpha, b]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) et

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant x_{n+1} - \alpha \leqslant C(x_n - \alpha)^2 \\ x_{n+1} - \alpha \sim \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(x_n - a)^2 \end{cases}$$

Comme $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes distincts, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un zéro α de f dans $]a, b[$, ce zéro est unique car f est supposée strictement croissante sur $]a, b[$.
La méthode de Newton consiste à approcher α en partant de x_0 une approximation plus grossière (obtenue depuis une méthode 'moins efficace' comme la dichotomie), c'est intéressant car la convergence de la méthode de newton est quadratique.
L'idée est de remplacer la courbe de f par sa tangente au point $x_n : y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$, cette tangente coupe l'axe des abscisses justement au point d'abscisse x_{n+1}.
(a) Comme $f(\alpha) = 0$, pour $x \in [a, b]$, la formule de Taylor Lagrange nous donne l'existence d'un $z_x \in [\alpha; x]$ tel que

$$\begin{aligned} f(\alpha) = f(x) + (\alpha - x)f'(x) + \frac{(\alpha - x)^2}{2} f''(z_x) &\Rightarrow 0 = \frac{f(x)}{f'(x)} + \alpha - x + \frac{(x - \alpha)^2}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)} \\ &\Rightarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \alpha = \frac{(x - \alpha)^2}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)} \\ &\Rightarrow \phi(x) - \alpha = \frac{(x - \alpha)^2}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

(bien-sûr ceci est licite car $f'(x)$ ne s'annule jamais). On peut alors passer à la valeur absolue et majorer violemment $\frac{f''(z_x)}{f'(x)}$ par $\|f''\|_{\infty,[a,b]} \|1/f'\|_{\infty,[a,b]} =: 2C$ pour avoir

$$|\phi(x) - \alpha| \leqslant C|x - \alpha|^2$$

Considérons $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $C\varepsilon < 1$ et $I =]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[\subset [a, b]$. Alors pour $x \in I$, on a $|\phi(x) - \alpha| \leqslant C\varepsilon^2 < \varepsilon$, d'où $\phi(I) \subset I$, en prenant $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une

suite de I, qui satisfait la condition 1, qui induit une convergence quadratique, car $C\varepsilon < 1$.
(b) Pour $x \in [\alpha, b]$, on a $f'(x)$ et $f(x) \geqslant 0$, d'où

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} < x$$

D'après le premier point, on a d'autre part

$$\phi(x) - \alpha = \frac{1}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}(x-\alpha)^2 > 0$$

Ces deux inégalités donnent que l'intervalle $I = [\alpha, b]$ est stable par ϕ. Pour $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de I strictement décroissante, elle converge donc vers une limite ℓ, qui doit être un point fixe de ϕ, donc $\ell = \alpha$, ceci donne le premier point. Pour le second, remarquons que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$$

avec par construction $z_n \in]\alpha, x_n[$, la fraction tend donc vers $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$ par continuité.