Titre : **Lemme de Morse**
Recasages : 158,170,171,214,215
Thème : Algèbre linéaire, calcul différentiel.
Références : Rouvière - Petit guide du calcul différentiel (p. 344)

Théorème 1. *Soient $U \in \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, telle que $df_0 = 0$ et $d^2 f_0$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, liés par un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme $\varphi : x \mapsto u$, avec $\varphi(0) = 0$ et*

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2 = \sum_{i=1}^{p} u_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} u_i^2$$

On commence par appliquer la formule de Taylor avec reste intégral sur f

$$f(x) = f(0) + df_0(x) + \int_0^1 \frac{(1-t)^1}{1!} d^2 f_{tx}(x, x) dt$$

ainsi, $f(x) - f(0) = {}^t x Q(x) x$ avec $Q(x) = \int_0^1 (1-t) d^2 f_{tx} dt$ est une matrice symétrique réelle. Nous montrons un lemme de réduction des matrices symétriques inversibles.

Lemme 2. *Soit $A_0 \in Gl_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$. Il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\rho : V \to Gl_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathbb{C}^1$ telle que*

$$\forall A \in V, A = {}^t\rho(A) A_0 \rho(A)$$

Démonstration. Étape 1 : On pose

$$\begin{array}{rccc} \chi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & {}^t M A_0 M \end{array}$$

Par régularité du produit et de la transposition des matrices, cette application est polynômiale, donc de classe $\mathbb{C}^1$. Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \chi(I_n + H) - \chi(I_n) &= {}^t(I_n + H) A_0 (I_n + H) - I_n A_0 I_n \\ &= {}^t H A_0 I_n + I_n A_0 {}^t H + {}^t H A_0 H \\ &= {}^t(A_0 H) + A_0 H + o(\|H\|) \end{aligned}$$

Donc $d\chi_{I_n}(H) = {}^t(A_0 H) + A_0 H$ et $H \in \operatorname{Ker} d\chi_{I_n} \Leftrightarrow A_0 H$ est antisymétrique.
Étape 2 : On voudrait appliquer le théorème d'inversion locale à χ, mais comme $d\chi_{I_n}$ n'est pas inversible, on va devoir être plus judicieux. Posons $F = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0 H \in S_n(\mathbb{R})\}$ et $\psi = \chi_{|F} : F \to S_n(\mathbb{R})$, on a $I_n \in F$ et $\operatorname{Ker} d\psi_{I_n} = \operatorname{Ker} d\chi_{I_n} \cap F = \{0\}$. Comme F et $S_n(\mathbb{R})$ ont même dimension, $d\psi_{I_n}$ est un isomorphisme, et comme ψ est de classe $\mathbb{C}^1$, par inversion locale, il existe $U \subset F$ un voisinage ouvert de I_n tel que ψ soit un $\mathbb{C}^1$ difféomorphisme entre U et $V = \psi(U)$.
Quitte à remplacer U par $U' = U \cap Gl_n(\mathbb{R})$, (ceci est licite car $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), on peut supposer que U est inclus dans $Gl_n(\mathbb{R})$. Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(I_n)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ avec

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi^{-1}(A) A_0 \psi^{-1}(A)$$

on pose alors $\rho := \psi^{-1}$ qui convient. □

Ici, $Q(x)$ est symétrique, avec $Q(0) = \frac{1}{2}d^2f_0 \in Gl_n(\mathbb{R})$, par notre lemme, il existe V un voisinage de $Q(0)$ dans $S_n(\mathbb{R})$, et $\rho : V \to Gl_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathbb{C}^1$ tel que $A = {}^t\rho(A)Q(0)\rho(A)$ pour tout $A \in V$. Par continuité de Q (continuité sous intégrale) il existe W un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x \in W, Q(x) \in V \quad \text{et} \quad Q(x) = {}^t(Q(x))Q(0)\rho(Q(x))$$

On pose $M(x) := \rho(Q(x))$ et $y = M(x)x$, on a alors $f(x) - f(0) = {}^tyQ(0)y$. Par hypothèse sur d^2f_x, il existe $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAQ(0)A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$, en posant $u = A^{-1}y$, on a

$$f(x) - f(0) = {}^tyQ(0)y = {}^tu{}^tAQ(0)Au = \sum_{i=1}^{p} u_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} u_i^2$$

On pose alors $\varphi(x) = A^{-1}M(x)x$, on a bien $\varphi(0) = 0$, et φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur W. Puis, pour $h \in W$, $\varphi(h) - \varphi(0) = A^{-1}M(h)h = A^{-1}M(0).h + o(\|h\|)$ d'où $d\varphi_0 = A^{-1}M(0)$ qui est inversible. Par le théorème d'inversion locale, φ induit un $\mathbb{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0, ce qui donne le résultat.