Titre : **Théorème des extrema liés + corollaire sur les endomorphismes symétriques**
Recasages : 151,159,214,215,219
Thème : Calcul différentiel, sous-variété, algèbre linéaire.
Références : Avez, Calcul différentiel

Théorème 1. *(Extrema liés)*
Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f, g_1, \cdots, g_r : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $g := (g_1, \cdots, g_r) : U \to \mathbb{R}^r$, $\Gamma := \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.
Si $a \in \Gamma$ est un extremum relatif de $f_{|\Gamma}$ et si les formes linéaires dg_{i_a} sont linéairement indépendantes. Alors $df_a \in V = \mathrm{Vect}(\{dg_{i_a}, i \in [\![1, r]\!]\})$ (les coefficients de df_a dans la base des dg_{i_a} sont appelés les multiplicateurs de Lagrange).

Par hypothèse, l'application linéaire

$$dg_a = \begin{pmatrix} dg_{1_a} \\ \vdots \\ dg_{r_a} \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^r$$

est surjective : g est une submersion en a, il existe donc un voisinage Ω de a dans $\mathbb{R}^n$ tel que $S := \Gamma \cap \Omega$ soit une sous-variété définie comme pré-image de 0 par la submersion g.
Étudions l'espace tangent T_aS : il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension r (car dg_a est à valeurs dans $\mathbb{R}^r$), de même que Ker dg_a, pour montrer que ces deux espaces sont égaux, il suffit de montrer que $T_aS \subset$ Ker dg_a. Soit donc $x \in T_aS$, il existe par définition $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = x$. Par définition de S, on a $g \circ \gamma = 0$ et en particulier

$$0 = (g \circ \gamma)'(0) = dg_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = dg_a(x)$$

d'où $x \in$ Ker dg_a et $T_aS =$ Ker dg_a.
De même, la fonction $f \circ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ admet un extremum local en 0, d'où

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = df_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = df_a(x)$$

et $T_aS =$ Ker $dg_a \subset$ Ker df_a.
On sait par définition de dg_a que Ker $dg_a = \bigcap_{i=1}^r$ Ker dg_{i_a}, on a donc

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^r \mathrm{Ker}\ dg_{i_a} \subset \mathrm{Ker}\ df_a &\Rightarrow (\mathrm{Vect}(dg_{1_a}, \cdots, dg_{r_a}))^o \subset \mathrm{Vect}(df_a)^o \\ &\Rightarrow \mathrm{Vect}(df_a) \subset \mathrm{Vect}(dg_{1_a}, \cdots, dg_{r_a}) \end{aligned}$$

Soit le résultat voulu.

Corollaire. *Soient $(E, (.,.))$ un espace vectoriel (réel) euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique : alors u est diagonalisable sur E (i.e E possède une base formée de vecteurs propres de u).*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $n = \dim E$. Le cas $n = 1$ est immédiat (tous les endomorphismes sont alors diagonaux).
Dans le cas général, considérons les applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (u(x), x) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\|^2 - 1 \end{array}$$

On a par définition $g^{-1}(0) = S(0,1) =: S$ est un compact, sur lequel f admet donc un minimum en $e_1 \in S$. Remarquons que g est une submersion, en effet, pour $x, h \in E$, on a

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= (x+h, x+h) - 1 - (x,x) + 1 \\ &= (x,x) + (x,h) + (h,x) + (h,h) - (x,x) \\ &= 2(x,h) + o(\|h\|) \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc $\nabla g(e_1) = 2e_1$, comme $\|e_1\| = 1 \neq 0$, dg_{e_1} est non nulle et surjective (théorème de Riesz), il s'agit donc d'une 'famille libre', le théorème des extremas liés nous donne alors $df_{e_1} = \lambda dg_{e_1}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$. Or, on a (pour $x, h \in E$)

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (u(x+h), x+h) - (u(x), x) \\ &= (u(x), x) + (u(x), h) + (u(h), x) + (u(h), h) - (u(x), x) \\ &= 2(u(x), h) + (u(h), h) \end{aligned}$$

Car u est symétrique, et comme $|(u(h), h)| \leqslant \|u\| \, \|h\|^2 = o(\|h\|)$, on a $\nabla f(e_1) = 2u(e_1)$. Le théorème des extrema liés donne alors $u(e_1) = \lambda e_1$ et e_1 est un vecteur propre de u.
Posons enfin $F = \mathrm{Vect}(e_1)^\perp$, pour $x \in F$, on a

$$(u(x), e_1) = (x, u(e_1)) = (x, \lambda e_1) = 0$$

Donc $u(x) \in F$, qui est alors stable par u : comme $\dim F = n-1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à u_F, ce qui termine la démonstration. $\square$