Titre : **Trigonalisation simultanée d'une famille finie d'endomorphismes**
Recasages : 154,157,159
Thème : Algèbre linéaire, dualité, réduction des endomorphismes.
Références : Gourdon - Algèbre (p.166)

Théorème 1. *Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie, et $u_1, \cdots, u_m \in \mathcal{L}(E)$ une famille d'endomorphismes trigonalisables. On suppose de plus que les u_i commutent entre eux deux à deux. Alors il existe une base de E dans laquelle les matrices des u_i sont toutes triangulaires supérieures (i.e les u_i sont* **co-trigonalisables***).*

On utilise une double récurrence sur m et $n = \dim E$: en posant $\mathcal{P}_{m,n}$ le résultat pour toute famille de m endomorphismes sur un espace de dimension n, on montre

$$\forall m \in \mathbb{N}^*(\forall n \in N, \mathcal{P}_{m,n}) \Rightarrow (\forall n \in N, \mathcal{P}_{m+1,n}) \;\text{ et }\; \forall n \in N, \mathcal{P}_{1,n}$$

L'hypothèse de trigonalisabilité individuelle rend le cas $\mathcal{P}_{1,n}$ trivial quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour $m \geqslant 2$ fixé, on montre $\forall n \in N, \mathcal{P}_{m,n}$ par récurrence sur n.
Le cas $n = 1$ est immédiat : tout endomorphisme admet dans toute base une 'matrice' triangulaire supérieure.
Supposons $n > 1$, pour $i \in [\![1, n]\!]$, comme u_i est trigonalisable, il existe un polynôme $P_i \in k[X]$ scindé sur k et tel que $P_i(u_i) = 0$. Considérant l'endomorphisme ${}^t u_i \in \mathcal{L}(E*)$, on a $P_i({}^t u_i) = (P_i(u_i))^t = 0$, donc P_i est aussi annulateur de ${}^t u_i$, qui est donc trigonalisable de même que u_i. En tant qu'endomorphisme trigonalisable, ${}^t u_i$ admet alors une valeur propre λ_i, d'espace propre $F_i \subset E^*$ non trivial.
On remarque ensuite que les endomorphismes ${}^t u_i$ commutent entre eux deux à deux, en effet on a

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], {}^t u_i \circ {}^t u_j = {}^t(u_j \circ u_i) = {}^t(u_i \circ u_j) = {}^t u_j \circ {}^t u_i$$

Soit $\varphi \in F_1 = \text{Ker } ({}^t u_1 - \lambda_1 Id_{E^*})$, on a, pour $i \in [\![1, n]\!]$

$${}^t u_1({}^t u_i(\varphi)) = {}^t u_i({}^t u_1(\varphi)) = {}^t u_i(\lambda_1 \varphi) = \lambda_1 {}^t u_i(\varphi)$$

donc ${}^t u_i(\varphi) \in F_1$, qui est donc stable par ${}^t u_i$. On peut alors poser $v_i := {}^t u_{i|F_1} \in \mathcal{L}(F_1)$, les polynômes P_i étant annulateurs des v_i, ceux-ci sont trigonalisables sur F_1 et ils commutent entre eux deux à deux.

- Si $F_1 = E^*$, alors ${}^t u_1$ est une homothétie, de matrice diagonale dans toute base, de même que u_1. Le problème est donc ramené à l'étude des endomorphismes $u_2, \cdots, u_m$, le résultat est alors donné par $P_{m-1,n}$.
- Si F_1 est de dimension $r < n$, alors par $P_{m,r}$, il existe $\{g_1, \cdots, g_r\}$ une base de F_1 dans laquelle les matrices de $v_1, \cdots, v_m$ sont triangulaires supérieures.

Dans tous les cas, on peut trigonaliser $v_1, \cdots, v_r$ dans une même base de F_1, donc $v_1, \cdots, v_r$ partagent un vecteur propre : le premier vecteur de la base $g_1 \in E^*$. Comme $\text{Vect}(g_1)$ est stable par tous les ${}^t u_i$, son orthogonal $H = \text{Ker } g_1$ est stable par tous les u_i. On peut donc considérer $w_i := (u_i)_{|H}$, et appliquer $P_{m,n-1}$ aux w_i : Il existe une base $e_1, \cdots, e_{n-1}$ de H dans laquelle les matrices des w_i sont toutes triangulaires supérieures, on obtient alors le résultat en prenant pour e_n un vecteur quelconque de $H^\perp$.