Titre : **Générateurs des groupes linéaires et spéciaux linéaires**
Recasages : 106,108,162
Thème : Algèbre linéaire
Références : Perrin (p. 99)

Théorème 1. *Soient k un corps, E un k-espace vectoriel de dimension n finie. Les transvections engendrent le groupe $Sl(E)$. Les transvections et dilatations engendrent le groupe $Gl(E)$.*

On procède par récurrence sur $n = \dim_k(E)$: le cas $n = 1$ est vide. On considère $n \geqslant 2$, et on utilise alors le lemme suivant :

Lemme 2. *Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$, alors l'une des possibilités suivantes est réalisées :*

- *Il existe une transvection u telle que $u(x) = y$.*
- *Il existe un couple (u, v) de transvections telles que $vu(x) = y$.*

Démonstration. On distingue deux cas, selon si x et y sont colinéaires.
Si x et y ne sont pas liés, on cherche u sous la forme $u = \tau(f, a) : t \mapsto t + f(t)a$ pour $f \in E^*$. On pose $a = y - x$ et H un hyperplan contenant a et pas x (a et x ne sont pas colinéaires par hypothèse), on définit alors $f(x) = 1$ étendue par 0 sur H. La transvection $u = \tau(f, a)$ convient, en effet $u(x) = x + f(x)(y - x) = y$.
Si x et y sont liés, on choisit $z \neq 0$ dans un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(x, y)$, et on applique deux fois le cas précédent : on trouve u et v deux transvections telles que $u(x) = z$ et $v(z) = y$. □

Considérons le résultat obtenu sur les espaces de dimension au plus $n - 1$, et soit $u \in Gl(E)$, de déterminant $\lambda \in k^*$, prenant v une dilatation de rapport λ, on obtient $v^{-1}u \in Sl(E)$, donc il suffit de montrer que les transvections engendrent $Sl(E)$.
Soient donc $u \in Sl(E)$ et $x \in E \setminus \{0\}$. On pose $y = u(x)$, par le lemme, quitte à remplacer u par $v^{-1}u$ où v est une transvection telle que $v(y) = x$, on peut supposer que $u(x) = x$. On pose $D = \mathrm{Vect}(x)$, et on note $\pi : E \to E/D$ la projection canonique. Considérant F un supplémentaire de D dans E, on identifie F et E/D, u induit $\widetilde{u}$ un automorphisme de F, avec $\widetilde{u} \in Sl(F) \simeq Sl(E/D)$. En effet, considérons $e_2, \cdots, e_n$ une base de F, la matrice de u dans la base $(x, e_2, \cdots, e_n)$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

où M est la matrice de $\widetilde{u}$ dans la base $e_2, \cdots, e_n$, on a alors $1 = \det(u) = \det(M) = \det(\widetilde{u})$.
Par hypothèse de récurrence, $\widetilde{u}$ se décompose alors comme un produit de transvections de F, $\widetilde{u} = \widetilde{\tau}_1 \cdots \widetilde{\tau}_r$. On étend les $\widetilde{\tau}_i$ à E par l'identité sur D (il s'agit toujours de transvections par la caractérisation de ces dernières), on a alors $\tau_1 \cdots \tau_r(x) = x = u(x)$ et $(\tau_1 \cdots \tau_r)_{|F} = \widetilde{\tau}_1 \cdots \widetilde{\tau}_r = \widetilde{u} = u_{|F}$ d'où le résultat.