Titre : **Théorème des extrema liés**
Recasages : 151,159,214,215,219
Thème : Calcul différentiel, algèbre linéaire.
Références : Gourdon, analyse (p. 317, 327)

Théorème 1. *(Extrema liés)*
Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f, g_1, \cdots, g_r : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $g := (g_1, \cdots, g_r) : U \to \mathbb{R}^r$, $\Gamma := \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.
Si $a \in \Gamma$ est un extremum relatif de $f_{|\Gamma}$ et si les formes linéaires dg_{i_a} sont linéairement indépendantes. Alors $df_a \in V = \mathrm{Vect}(\{dg_{i_a}, i \in [\![1, r]\!]\})$ (les coefficients de df_a dans la base des dg_{i_a} sont appelés les multiplicateurs de Lagrange).

On pose $s = n - r$, comme les dg_{i_a} sont linéairement indépendantes, on a $s \geqslant 0$. Si $s = 0$, alors $V = (\mathbb{R}^n)^*$ par hypothèse d'indépendance des dg_{i_a} et le résultat est immédiat.
On peut donc supposer $s \geqslant 1$, on identifie $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$, en écrivant les éléments de $\mathbb{R}^n$ comme (x, y), avec $x \in \mathbb{R}^s$ et $y \in \mathbb{R}^r$ (dans cette écriture, on pose $a = (\alpha, \beta)$). On a par hypothèse que la matrice

$$\begin{pmatrix} dg_{1_a} \\ dg_{2_a} \\ \vdots \\ dg_{r_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(a) & & \vdots & \vdots & & \frac{\partial g_2}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$$

est de rang r, on peut donc en extraire une sous-matrice de taille $r \times r$ inversible. Quitte à permuter les variables, on peut donc supposer que

$$\det \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a) \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant r} = \det Jg_{y_1, \cdots, y_r} \neq 0$$

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites : il existe

- $\alpha \in U'$ un voisinage ouvert de α dans $\mathbb{R}^s$
- $a \in \Omega$ un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$
- $\varphi : (\varphi_1, \cdots, \varphi_r) : U' \to \mathbb{R}^r$ de classe $\mathbb{C}^1$

tels que

$$(g(x, y) = 0 \text{ avec } x \in U' \text{ et } (x, y) \in \Omega) \Leftrightarrow (y = \varphi(x))$$

autrement dit, sur un voisinage de a, les éléments de Γ sont de la forme $(x, \varphi(x))$, posons $h(x) = f(x, \varphi(x))$ qui admet un extremum local en α (car f en admet un en $a = (\alpha, \varphi(\alpha))$). Donc

$$\forall i \in [\![1, s]\!], 0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) \frac{\partial f}{\partial y_j}(a)$$

Par ailleurs, en écrivant les dérivées partielles par rapport aux $x_i$de $g(x, \varphi(x)) = 0$, on obtient

$$\forall k \in [\![1, r]\!] i \in [\![1, s]\!], 0 = \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a)$$

Autrement dit, les s premières colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} df_a \\ dg_{1_a} \\ dg_{2_a} \\ \vdots \\ dg_{r_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(a) & & \vdots & \vdots & & \frac{\partial g_2}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$$

s'expriment comme combinaisons linéaires des r dernières, donc $\mathrm{rg} M \leqslant r$. Or, comme $\mathrm{rg}\,{}^t M = \mathrm{rg} M$, les $r+1$ lignes de M forment une famille liée, il existe donc $\mu_0, \cdots, \mu_r$ non tous nuls tels que

$$\mu_0 df_a + \mu_1 dg_{1_a} + \cdots \mu_r dg_{r_a} = 0$$

comme les dg_{i_a} forment une famille libre, on a $\mu_0 \neq 0$ d'où le résultat.