Titre : **Réduction des endomorphismes normaux**
Recasages : 151,153,154,155,158,160
Thème :Algèbre linéaire
Références : Gourdon - Algèbre (p. 260)

Lemme 1. *Soient E un espace euclidien de dimension 2, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal sans valeurs propres réelles. Dans toute base B de E, on a*

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec $b \neq 0$.

Démonstration. Soit B une base de E, avec $Mat_B(u) = M := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on a $b \neq 0$ car u est sans valeur propre réelle (si $b = 0$, M est triangulaire supérieure et a, d sont des valeurs propres). La normalité s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

En particulier, $c^2 = b^2$ et $b = \pm c$. Si $b = c$, alors $Mat_B(u)$ est symétrique et donc admet des valeurs propres réelles, donc $b = -c$. On en déduit $d-a = a-d$ et $a = d$, d'où le résultat. $\square$

Théorème 2. *Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal, alors il existe B une base orthonormale de E telle que*

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$

Avec $\forall i \in [\![1, r]\!], \lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\forall j \in [\![1, s]\!], \tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$, avec $a_j, b_j \in \mathbb{R}$.

On raisonne par récurrence sur $n = \dim E$. Le cas $n = 1$ est immédiat, supposons à présent le résultat obtenu pour les espaces de dimension au plus $n-1$, et supposons E de dimension n. On distingue deux cas selon si u admet ou non une valeur propre réelle.
Si u admet $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre, dont on note E_λ l'espace propre associé. Son orthogonal $E_\lambda^\perp =: F$ est stable par u et par u^* par commutativité. Comme $u_{|F}$ et $u^*_{|F} = u^*_{|F}$ commutent et $\dim F \leqslant n-1$, par hypothèse de récurrence, il existe B_1 une base orthonormée de F telle que $Mat_{B_1}(u_{|F})$ a la forme voulue. Si B_2 est une base orthonormée de E_λ, la base $B = B_1 \cup B_2$ donne le résultat voulu.
Si u est sans valeur propres réelles, on peut considérer $Q(X) = X^2 - 2\alpha X + \beta$ un facteur irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme caractéristique de u (on a en particulier $\alpha^2 < \beta$ et $\beta > 0$), on pose $N = \operatorname{Ker} Q(u)$.

Si M désigne la matrice de u dans une quelconque base, comme Q est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, on a $Q(X) = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$, valeur propre de M. On a alors

$$\det(Q(u)) = \det(u-\lambda)\det(u-\overline{\lambda}) = \det(M-\lambda I_n)\det(M-\overline{\lambda} I_n) = 0$$

donc $N \neq \{0\}$. Comme $u \in \mathcal{C}(u^*)$ [1], on a $\mathbb{R}[u] \subset \mathcal{C}(u^*)$ et en particulier, $Q(u)$ et u^* commutent : comme N est u-stable, il est également u^*-stable.
Posons $v = u_{|N}$, on a $v^* = u^*_{|N}$, on a $v^*v = (u^*u)_{|N}$ est symétrique, donc admet $\mu \in \mathbb{R}$ une valeur propre, et $x \in N \setminus \{0\}$ avec $v^*v(x) = \mu x$.
Comme $x \in N$, on a $u^2(x) = 2\alpha u(x) - \beta x$ et u est sans valeurs propres réelles, on a $F = \mathrm{Vect}(x, u(x)) = \mathrm{Vect}(u(x), u^2(x))$ est de dimension 2 et u-stable. On a

$$u^*u(x) = v^*v(x) = \mu x \in F \quad \text{et} \quad u^*u^2(x) = uu^*u(x) = u(\mu x) = \mu u(x) \in F$$

Donc F est également u^*-stable, et $u^*_{|F} = u^*_{|F}$. Ainsi, $u_{|F}$ est normal, par notre lemme, on peut considérer B_2 une base orthonormée de F avec $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
Comme F est u^*-stable et u-stable, $F^\perp$ est $u^{**} = u$-stable et u^*-stable, donc $u^*_{|F^\perp} = u^*_{|F^\perp}$, donc $u_{|F^\perp}$ est normal. Comme $F^\perp$ est de dimension $n-2 < n$, par notre hypothèse de récurrence, on obtient une base orthonormée B_1 de $F^\perp$ telle que $Mat_{B_1}(u_{|F^\perp})$ ait la forme voulue, la base $B_1 \cup B_2$ de E donne le résultat voulu.

1. $\mathcal{C}(u^*)$ est le commutant de u^*, l'ensemble des endomorphismes qui commutent à u^*