<u>Titre :</u> Théorème de Burnside
Recasages : 106,150,151,153,154
Thème : Algèbre linéaire, théorie des groupes.
Références : Francinou, Gianella, Nicolas - Oraux X-Ens (p.185)

<u>Théorème</u> 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et G un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini (il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $g \in G$, $g^N = 1$). Alors G est un groupe fini.*

On commence par montrer un lemme classique sur les matrices nilpotentes :

<u>Lemme</u> 2. *Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si $tr(A^k) = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors A est nilpotente.*

Démonstration. Comme A est une matrice complexe, elle est semblable à une matrice triangulaire T. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A, et $n_1, \cdots, n_r$ leurs multiplicités respectives. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$tr(A^k) = tr(T^k) = \sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i^k = 0$$

Le vecteur $(n_1, \cdots, n_r)$ de $\mathbb{C}^r$ est donc solution du système linéaire $AX = 0$, avec

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix}$$

On reconnait une matrice de Vandermonde (presque) dont le déterminant est donné par $\prod_{i=1}^r \lambda_i V(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \neq 0$ par construction, c'est une contradiction car $(n_1, \cdots, n_r) \neq 0$. $\square$

Soit G un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{C})$, on pose $V = \text{Vect}(G)$, qui est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension $m \leqslant n^2$. Soit $(M_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ une base de V constituée d'éléments de G, on pose

$$\begin{array}{rccl} f : & G & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ & A & \longmapsto & (tr(AM_i))_{i \in [\![1,m]\!]} \end{array}$$

Soient $A, B \in G$ telles que $f(A) = f(B)$, par linéarité de la trace, on a $tr(AM) = tr(BM)$ pour tout $M \in V$ (en particulier pour tout $M \in G$. On pose $D = AB^{-1} \in G$, pour $k \geqslant 1$, on a

$$tr(D^k) = tr(AB^{-1}D^{k-1}) = tr(BB^{-1}D^{k-1}) = tr(D^{k-1})$$

Par une récurrence immédiate, on a $tr(D^k) = tr(I_n) = n$ pour $k \in \mathbb{N}$, et donc

$$tr((D - I_n)^k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} tr(D^i(-I^{k-i})) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} tr(D^i) = n(1-1)^k = 0$$

pout $k \geqslant 1$, par notre lemme, $D - I_n$ est nilpotente. En particulier, si G est constitué d'éléments diagonalisables, alors $D - I_n$ l'est également, donc $D - I_n = 0$ et donc $A = B$: f est alors injective.

Si maintenant G est d'exposant fini N, tout élément de G est annulé par le polynôme $X^N - 1$, qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ (ses racines sont les racines N-èmes de l'unité). Donc l'application f est injective dans ce cas. Cependant, par construction, f est à valeurs dans T^r, ou T désigne l'image de G par la trace, qui est un ensemble fini (les sommes de n racines N-èmes de l'unité), donc G est d'ordre fini.