TD 7 - Exercices supplémentaires

Exercice 1.

1. Montrer que la similitude f définie par
$$f(z) = (1+i)z + 5i$$
est une similitude directe à centre, déterminer son point fixe, son rapport et son angle.
2. Calculer l'application f^{-1}.
3. Calculer l'image par f du cercle (C) de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 2. On fixe 4 points du plan A,B,C,D d'affixe respectives $0, 1, i, 1+i$

1. Montrer qu'il n'existe pas de similitude directe φ telle que $\varphi(A) = A$, $\varphi(B) = C$ et $\varphi(C) = D$.
2. Déterminer toutes les similitudes directes φ telles que $\varphi(A) = A$ et $\varphi(C) = B$
3. Existe-t-il une similitude directe qui envoie le cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon 1 sur le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre B et de rayon 2. Si oui, l'écrire sous la forme $\varphi(z) = \alpha z + \beta$.

Exercice 3.

1. Déterminer une équation complexe du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $1+i$ et de rayon $\sqrt{2}$, sous la forme $\alpha z\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0$ (*indication : développer l'égalité* $|z-(1+i)|^2 = 2$)
2. Considérer l'homographie
$$f : z \mapsto \frac{2z+1}{z}$$
Montrer que $f^{-1}(z') = \frac{1}{z'-2}$.
3. Déterminer l'image du cercle $(\mathcal{C})$ par f (*indication : remplacer z par $f^{-1}(z')$ dans l'équation du cercle, et développer*).

Exercice 4. (Calculs sur l'exercice 3 TD5)

1. Calculer
$$\begin{matrix} iii^{-1} & iji^{-1} & iki^{-1} \\ jij^{-1} & jjj^{-1} & jkj^{-1} \\ kik^{-1} & kjk^{-1} & kkk^{-1} \end{matrix}$$
2. En déduire que les matrices $s_i, s_j, s_k \in SO_3(\mathbb{R})$ sont
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(*indication : On rappelle que $\{i, j, k\}$ forme une base de l'ensemble P des quaternions purs*).
3. Montrer que la matrice $M = s_{\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)}$ est donnée par
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$