UPJV | 2021-2022

L3 Mathématiques | Nombres complexes et géométrie

TD 6 - Birapport, inversions, homographies.

† *Birapport, homographies*

Exercice 1. On définit le ***birapport*** de quatre nombres complexes distincts a, b, c, d par

$$[a, b, c, d] = \frac{a - c}{a - d}\frac{b - d}{b - c}$$

Montrer que

$[b, a, c, d] = [a, b, c, d]^{-1}$	$[a, c, b, d] = 1 - [a, b, c, d]$	$[a, b, d, c] = [a, b, c, d]^{-1}$
$[c, b, a, d] = -\frac{[a,b,c,d]}{[a,c,b,d]} = \frac{[a,b,c,d]}{[a,b,c,d]-1}$	$[d, b, c, a] = 1 - [a, b, c, d]$	$[a, d, c, b] = -\frac{[a,b,c,d]}{[a,c,b,d]} = \frac{[a,b,c,d]}{[a,b,c,d]-1}$

Remarquez que quel que soit l'ordre dans lequel on met a, b, c, d, le fait que le birapport est réel est conservé.

On admet la proposition suivante :

Proposition 1. Le birapport de quatre nombres complexes distincts est réel si et seulement si les quatre points sont cocycliques ou alignés. Ainsi, une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ préserve les droites et cercles si et seulement si elle préserve le fait que le birapport soit réel.

Exercice 2. (Inversions) Soit Ω un point du plan d'affixe c et $r \in \mathbb{R}^*$. L'inversion $i := i(\Omega, r)$ de centre Ω et de rapport r est l'application du plan épointé $P \setminus \{\Omega\}$ dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

- M' est sur la droite (ΩM).
- Le produit scalaire $\langle \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \rangle$ est égal à r^2.

1. Montrer que l'expression complexe de $i(\Omega, r)$ est

$$i(\Omega, r)(z) = \frac{r^2}{\overline{(z - c)}} + c$$

   (*Indication : on rappelle que le produit scalaire* $\langle \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \rangle$ *est égal à* $\mathrm{Re}((z - \Omega)(\overline{z' - \Omega}))$)
2. Montrer que $i(\Omega, r)$ est une involution et déterminer son image.
3. Montrer que $i(\Omega, r)$ envoie droites et cercles sur droites et cercles.
4. Montrer que pour deux points M, N, on a $i(M)i(N) = \frac{r^2 MN}{(\Omega M)(\Omega N)}$

Exercice 3. Soient $\Omega \in P$, $r > 0$ et $\mathcal{D} = D(\Omega, r)$ le disque de centre Ω et de rayon r. Montrer que l'inversion $i(\Omega, r)$ échange l'intérieur de $\mathcal{D}$ (i.e le disque ouvert) et celui de $P \setminus \mathcal{D}$ (i.e le complémentaire du disque fermé) et fixe ponctuellement le cercle $\mathcal{C} := \partial\mathcal{D}$.

† *Homographies, retour du projectif*

Exercice 4. Soit une homographie (avec $c \neq 0$)

$$\varphi : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

1. Calculer l'ensemble de définition de φ.
2. Montrer que si $z' = \varphi(z)$, alors
$$z = \frac{dz' - b}{-cz' + a}$$
en déduire que l'image de φ est $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$.
3. Montrer que l'on étend φ en une bijection $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en posant $\varphi(-d/c) = \infty, \varphi(\infty) = a/c$
À partir d'ici, quand on parlera d'homographie, on parlera toujours implicitement de son extension $\mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
4. Montrer que les homographies forment un groupe.

Exercice 5. Soit une homographie
$$\varphi : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

1. Montrer que toute homographie est la composée de translations, d'une inversion, de la conjugaison complexe (donc une symétrie), et d'homothétie rotation.
2. Montrer que toute homographie envoie droites et cercles sur droites et cercles.
3. Considérons l'application p qui à $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ associe l'homographie $p(M) : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$.
   a) Montrer que p est un morphisme surjectif de $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ vers le groupe des homographies.
   b) Montrer que $p(M) = Id$ si et seulement si $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
   c) En déduire un isomorphisme $\overline{p}$ allant de $PGl_2(\mathbb{C})$ vers le groupe des homographies.

On rappelle que l'on a une bijection entre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et $\mathbb{C}P^1$:
$$f : \begin{cases} z \mapsto [z:1] \\ \infty \mapsto [1:0] \end{cases} \quad , \quad f^{-1} : \begin{cases} [z:z'] \mapsto \frac{z}{z'} & \text{si } z' \neq 0 \\ [z:0] \mapsto \infty \end{cases}$$

Exercice 6. (Version projective des homographies)
Soit une homographie
$$\varphi : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

1. Soit $[z : z'] \in \mathbb{C}P^1$, montrer que
$$\phi([z:z']) := f \circ \varphi \circ f^{-1}[z:z'] = [az + bz' : cz + dz'] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .[z:z']$$
2. Montrer qu'une homographie envoie $\infty = [1:0]$ sur ∞ si et seulement si c'est une similitude.
3. Montrer qu'une homographie qui préserve $\infty = [1:0]$ et $0 = [0:1]$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in P\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ une homographie, montrer que $M^2 = 1$ si et seulement si
$$\begin{cases} a^2 = d^2 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \end{cases}$$

En déduire que M est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

(*Indication : Rappelez vous que* $X = 1$ *dans* $P\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ *veut dire que* X *est de la forme* $X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *pour* $\lambda \in \mathbb{C}$).