TD 5 - Algèbre des quaternions, applications géométriques

Exercice 1. On considère

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \middle| a^2+b^2=1 \right\}$$

l'ensemble des rotation du plan. En considérant le cercle unité $\mathbb{S}^1$ comme un sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$, montrer qu'il existe un isomorphisme de groupes topologiques

$$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} SO_2(\mathbb{R}).$$

Exercice 2. (Versions matricielles de $\mathbb{H}$)

1. Version réelle : On se place dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dans lequel on définit

$$1 := I_4 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad I := \begin{pmatrix} 0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}, \quad K := \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

   a) Montrez ces matrices respectent les relations qui définissent les quaternions :

$$\begin{array}{cccc} -1 = I^2 = J^2 = K^2 & IJ = K & JK = I & KI = J \\ & JI = -K & KJ = -I & IK = -J \end{array}$$

   b) Pour $q = a + ib + jc + kd$ un quaternion, écrire la matrice $M(q) = M(a,b,c,d) = a1 + bI + cJ + dK$, et montrer que $M(\overline{q}) = {}^tM(q)$.

   c) En déduire que la conjugaison des quaternions est anticommutative : $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$

2. Version complexe : On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, dans lequel on définit

$$1 := I_2 = \begin{pmatrix} 1&0\\0&1 \end{pmatrix}, \quad I := \begin{pmatrix} i&0\\0&-i \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0&-1\\1&0 \end{pmatrix}, \quad K := \begin{pmatrix} 0&-i\\-i&0 \end{pmatrix}$$

   a) Montrez ces matrices respectent les relations qui définissent les quaternions :

$$\begin{array}{cccc} -1 = I^2 = J^2 = K^2 & IJ = K & JK = I & KI = J \\ & JI = -K & KJ = -I & IK = -J \end{array}$$

   b) Montrer que $q = a + ib + jc + kd$ s'écrit $\alpha + j\beta$, avec $\alpha = a + ib, \beta = c - id$.

   c) En déduire que la matrice $M(q) = a1 + bI + cJ + dK$ s'écrit

$$M(q) = M(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

Exercice 3. On rappelle la fonction $N : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^+$, définie, pour $q = a + ib + jc + kd$ par

$$N(q) = q\overline{q} = \overline{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

1. En utilisant la forme matricielle complexe de l'exercice précédent, montrer que $N(qq') = N(q)N(q')$.
2. En déduire que l'ensemble

$$\Sigma := \{n \in \mathbb{N} \ ; \ \exists a,b,c,d \in \mathbb{N} \ ; \ n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2\}$$

   est stable par multiplication.

En fait, on peut montrer que $\Sigma = \mathbb{N}$. C'est le théorème des quatre carrés de Lagrange.

Exercice 4. Considérons G le sous-groupe de $\mathbb{H}^\times$ formé des éléments de norme 1. Pour $q \in G$ et $q \in \mathbb{H}$, on pose

$$S_q(q') := qq'q^{-1} = qq'\overline{q}.$$

1. Montrer que le sous-ensemble $G \subset \mathbb{R}^4$, muni de la topologie induite, est homéomorphe à $\mathbb{S}^3$.
2. Montrer que, pour tout $q \in G$ l'application $S_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ est un automorphisme linéaire de $\mathbb{H}$. En déduire que l'on a une application
$$S : G \to GL_4(\mathbb{R}).$$
3. Montrer qu'en fait, S est un morphisme de groupes et déterminer son noyau*indication : on rappelle que le centre de* $\mathbb{H}$ *est l'ensemble* $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $\mathrm{im}(S) \subset O_4(\mathbb{R})$ et que l'espace P des quaternions purs est stable par tous les S_q, $q \in G$.
5. Pour $q \in G$, posons $s_q := S_{q|P}$. Prouver qu'on obtient ainsi un morphisme de groupes
$$s : G \to O_3(\mathbb{R})$$
et calculer son noyau.
6. En munissant $O_3(\mathbb{R})$ de la topologie usuelle induite par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$, montrer que le morphisme s est continu.
7. En déduire que l'on a $\mathrm{im}(s) \subset SO_3(\mathbb{R})$ *(indice : on pourra penser à un argument de connexité utilisant le déterminant et la question 1).*
8. Rappelons que l'on appelle *renversement* toute rotation d'angle π. Montrer que, pour $p \in P \cap G$, l'application s_p est le renversement d'axe $\mathrm{Vect}(p)$.
9. En déduire que $\mathrm{im}(s) = SO_3(\mathbb{R})$ *(on pourra utiliser le fait que les symétries orthogonales engendrent* $O_3(\mathbb{R})$*. Concernant ce fait, on pourra consulter le livre de Claude Tisseron, "Géométries affine, projective et euclidienne", Thème 5, Théorème 1.2.5).*
10. Conclure qu'il existe un isomorphisme de groupes
$$\overline{s} : G/\{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R}).$$
11. Montrer qu'il existe sur la sphère $\mathbb{S}^3$ une structure naturelle de groupe et que le quotient $\mathbb{S}^3/\{\pm 1\}$ est isomorphe à $SO_3(\mathbb{R})$.

Exercice 5. On reprend la représentation matricielle complexe des quaternions.

1. Soit $q = \alpha + j\beta$ un quaternion, avec $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ et $\beta = c - id \in \mathbb{C}$. Montrer que $M(\overline{q}) = {}^t\overline{M(q)}$
2. En déduire qu'un quaternion q est de norme 1 si et seulement si $M(q)^{-1} = {}^t\overline{M(q)}$, autrement dit si $M(q) \in U_2(\mathbb{C})$.
3. Montrer que l'application $q \mapsto M(q)$ induit un morphisme injectif entre G et $SU_2(\mathbb{C})$.
4. Montrer que ce morphisme est en fait surjectif : Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU_2(\mathbb{C})$ une matrice, montrer que $b = -\overline{c}$ et $d = \overline{a}$, et en déduire que $M = M(a, c)$.
5. Déduire de l'exercice précédent un isomorphisme $SU_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.