# TD 4 - Actions de groupes, espaces projectifs

† *Actions de groupes et espaces projectifs*
On travaille ici sur un corps $\mathbb{k}$ quelconque, en pratique on pensera à $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$, mais gardez en mémoire que ces exercices marchent dans le cas général.

**Exercice 1.** (Espaces projectifs)

1. Montrer que $\mathbb{k}^*$ muni de la multiplication forme un groupe.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le groupe $\mathbb{k}^*$ agit sur l'ensemble $\mathbb{k}^{n+1} \setminus \{0\}$ par multiplication scalaire.
3. Montrer qu'un $(n+1)$-uplet $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{k}^{n+1} \setminus \{0\}$ détermine une unique droite de $\mathbb{k}^{n+1}$ et que deux $(n+1)$-uplets détermine la même droite si et seulement s'il existe un scalaire non nul $\lambda$ tel que
$$(b_0, \cdots, b_n) = (\lambda a_0, \cdots, \lambda a_n)$$
4. En déduire que l'ensemble des orbites sous l'action de $\mathbb{k}^*$ sur $\mathbb{k}^{n+1} \setminus \{0\}$ est en bijection avec l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{k}^{n+1}$.

*L'espace des orbites (ou espace quotient) de l'action est noté $\mathbb{k}P^n$, c'est l'***espace projectif** *de dimension $n$ sur $\mathbb{k}$, dans le cas $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cet espace est naturellement muni d'une topologie, qui en fait un espace géométrique, par ailleurs très important*

**Exercice 2.**

1. Montrer que le groupe $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{k})$ agit sur $\mathbb{k}^n$ par multiplication à gauche.
2. Montrer que les orbites sous cette action sont $\{0\}$ et $\mathbb{k}^n \setminus \{0\}$.
3. Montrer que cette action est ***fidèle*** : l'ensemble
$$\{M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{k}) \mid \forall x \in \mathbb{k}^n, Mx = x\}$$
est réduit à $\{I_n\}$.

**Exercice 3.** (Groupe projectif linéaire)

1. Montrer que l'action de $\mathrm{Gl}_{n+1}(k)$ sur $\mathbb{k}^{n+1}$ de l'exercice 2 préserve la colinéarité, en déduire une action de $\mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{k})$ sur l'ensemble $\mathbb{k}P^n$.
2. Montrer que $H = \{\lambda I_{n+1} \mid \lambda \in k^*\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{k})$, en fait inclus dans le centre de $\mathrm{Gl}_n(k)$ (*on peut en fait montrer que $H$ est égal au centre de* $\mathrm{Gl}_n(k)$)
3. Soit $M \in \mathrm{Gl}_{n+1}(k)$, montrer que si $M$ laisse invariantes (globalement) toutes les droites vectorielles, alors $M \in H$. Autrement dit, montrer l'implication
$$(\forall x \in \mathbb{k}^{n+1}, \exists \lambda_x \in \mathbb{k}^* \mid Mx = \lambda_x x) \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{k}^* \mid \forall x \in \mathbb{k}^{n+1}, Mx = \lambda x)$$
(*Indication : prendre $x$ et $y$ non colinéaires, et considérer $M(x+y)$*)
4. En déduire une action fidèle de $P\mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{k}) := \mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{k})/H$ sur $\mathbb{k}P^n$

† *Wait it's all $\mathbb{S}^2$ ? Always has been!*

**Exercice 4.** (Projection stéréographique)
On se place dans $\mathbb{R}^3$, on note :

- $\mathbb{S}^2$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$
- $N = (0, 0, 1)$ le pôle nord de $\mathbb{S}^2$
- $\mathcal{P}$ le plan d'équation $t = 0$ (on l'identifie à $\mathbb{C}$)

On pose la projection stéréographique (issue de $N$) l'application $\pi_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathcal{P}$ qui à $P$ associe $(NP) \cap \mathcal{P}$. Soient $P = (x, y, t) \in \mathbb{S}^2$ et $\pi_N(P) = z = u + iv$.

1. Calculer $\pi_N(P)$ en fonction de $x$, $y$ et $t$.
2. Exprimer $(x, y, t)$ en fonction de $z$.
3. Montrer que la bijection $\pi_N$ s'étend en une bijection entre $\mathbb{S}^2$ et l'ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ définit comme $\mathbb{C}$, enrichi d'un "point à l'infini"

(*En fait, on peut faire de cette bijection un homéomorphisme : et donner un vrai sens à l'expression "point à l'infini"*)

**Exercice 5.** On travaille dans $\mathbb{C}P^1$, on rappelle que cet ensemble est constitué des droites vectorielles de $\mathbb{C}^2$. Étant donné $(z, z') \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, la droite engendrée par $(z, z')$ est notée $[z : z']$, on a donc par définition

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, [z : z'] = [\lambda z : \lambda z']$$

On dit que $z, z'$ sont un couple de ***coordonées homogènes*** du point projectif $[z : z']$.

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C}P^1$ définie par $z \mapsto [1 : z]$ et $\infty \mapsto [0 : 1]$ est une bijection.
2. Déduire de l'exercice précédent une bijection entre $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{C}P^1$, écrire la valeur de cette bijection pour $(x, y, t) \in \mathbb{S}^2$.
3. Montrer que la fonction $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{S}^2$, réciproque de la précédente, est donnée par

$$[z : z'] \mapsto \frac{1}{|z|^2 + |z'|^2} \begin{pmatrix} z'\overline{z} + \overline{z'}z \\ i(\overline{z'}z - z'\overline{z}) \\ |z'|^2 - |z|^2 \end{pmatrix}$$