TD 3 : Similitudes et exercices géométriques classiques.

Dans tous les exercices, on identifie $\mathbb{C}$ à un plan affine réel $\mathcal{P}$.

Exercice 1. (Similitudes complexes vs similitudes géométriques)
On définit une ***similitude géométrique directe*** comme une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui multiplie les distances par une constante fixe, i.e telle que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad |f(z) - f(z')| = k|z - z'|$$

et qui préserve les angles orientés : pour A, B, C d'affixe a, b, c, l'angle orienté $\widehat{ABC}$ est le même que l'angle $\widehat{f(A)f(B)f(C)}$.

1. Montrer qu'une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une similitude géométrique directe si et seulement si, pour $x, y, z \in \mathbb{C}$ distincts deux à deux
$$\frac{f(x) - f(y)}{f(z) - f(y)} = \frac{x - y}{z - y}$$
(*indication : considérez l'application* $\phi : (z, z') \mapsto \frac{f(z)-f(z')}{z-z'}$)
2. Montrer qu'une similitude complexe directe, i.e une application de la forme $f : z \mapsto az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, est une similitude géométrique directe.
3. Montrer qu'une similitude géométrique directe peut s'écrire comme une similitude complexe directe. (*indication : raisonnez par analyse synthèse*).

Remarque 1. On peut faire un travail similaire pour montrer l'équivalence entre les similitudes géométriques et complexes indirectes.

Exercice 2. On se donne les transformations du plan suivantes

$$z \overset{t}{\mapsto} z + 2$$

$$z \overset{r}{\mapsto} iz$$

1. Calculer $r^{123}(z)$.
2. Calculer $r \circ t$ et $t \circ r$.
3. Déterminer les images de la droite D d'équation complexe $(1 + i)z + (1 - i)\overline{z} + 2 = 0$ et du cercle C d'équation complexe $z\overline{z} - z - \overline{z} = 0$ par l'application $r \circ t$.

Exercice 3. Considérons les transformations

$$f : z \mapsto -i\overline{z} + 1 + i, \quad g : z \mapsto i\overline{z} - 1 + i.$$

1. Déterminer les points fixes de f et ceux de g. Déterminer aussi l'ensemble des points fixes par f et g, simultanément.
2. Quelle sont la nature et les paramètres de la transformation $f \circ g$.

Exercice 4. Déterminer la nature et les paramètres des transformations du plan $\mathcal{P}$ suivantes écrite en complexe :

1. $z \mapsto \frac{z}{i}$,

2. $z \mapsto z + 2 + i$,
3. $z \mapsto (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$,
4. $z \mapsto (1 + i\tan(\alpha))z - i\tan(\alpha)$, avec $\alpha \in [0, \pi/2[$.

Exercice 5. Soit $f : z \mapsto \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

1. Montrer que f est une similitude directe à centre, déterminer son point fixe Ω, son rapport et son angle.
2. Si M est un point du plan d'affixe z, on note $f(M)$ le point d'affixe $f(z)$. Montrer que pour tout M, le triangle $\Omega M f(M)$ est rectangle en $f(M)$.

Exercice 6. Soit Sim^+ l'ensemble des similitudes directes de $\mathcal{P}$.

1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, montrer que l'ensemble
$$\mathrm{Sim}^+_{z_0} = \{\phi \in Sim^+ \mid \phi(z_0) = z_0\}$$
des similitudes qui fixent z_0 est un sous-groupe de Sim^+.
2. Le sous-groupe $\mathrm{Sim}^+_{z_0}$ est-il commutatif ?
3. Soit $z_0 = 0$, le sous-groupe Sim^+_0 est-il un sous-groupe distingué de Sim^+ ?
4. Soit $\phi \in \mathrm{Sim}^+$ une similitude directe qui fixe deux points distincts du plan. Que peut-on dire de ϕ ?
5. Soit D la droite du plan d'équation cartésienne $x = 0$. Déterminer l'ensemble
$$\mathrm{Stab}(D) = \{\phi \in \mathrm{Sim}^+ \mid \phi(D) = D\}$$
des similitudes directes qui stabilisent la droite D. Est-ce un sous-groupe de Sim^+ ?

Exercice 7. Trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes z, z^2 et z^4 sont alignés.

Exercice 8. (Théorèmes de Thébault et de Van Aubel)
Soit $ABCD$ un quadrilatère direct de $\mathcal{P}$. On construit quatre carrés qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Les centres de gravité respectifs de ces carrés sont notés P, Q, R et S.

1. Montrer que l'affixe p du centre de gravité P du carré s'appuyant sur $[AB]$ vérifie $p = \frac{a-ib}{1-i}$. Trouver des relations analogues pour les autres carrés.
2. En déduire le *théorème de Thébault* : si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $PQRS$ est un carré.
3. En calculant $\frac{s-q}{r-p}$, prouver le *théorème de Van Aubel* : $PQRS$ est un pseudo-carré, c'est-à-dire que ses diagonales sont orthogonales et de même longueur.

Exercice 9. Notons A_0 le point d'affixe 6 et s la similitude centrée en l'origine O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_{n+1} := s(A_n)$.

1. Déterminer, pour $n \geq 1$, l'affixe de A_n. En déduire que A_{12} est sur l'axe des réels.
2. Montrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
3. Calculer la longueur du segment $[A_0A_1]$. En déduire la longueur ℓ de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \cdots A_{11}A_{12}$.

Exercice 10. Soit $ABCD$ un carré dans le plan $\mathcal{P}$. Montrer que, si A et B sont à coordonnées entières, alors il en est de même pour C et D.
Existe-t-il un triangle équilatéral de $\mathcal{P}$ dont tous les sommets sont à coordonnées entières ?

Exercice 11. Soit $a \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module 1 et soient $z_1, \ldots, z_n$ les racines complexes de l'équation $z^n = a$. Montrer que les points d'affixes $(1 + z_1)^n, \ldots, (1 + z_n)^n$ sont alignés.