# TD 2 : Retour sur l'exponentielle complexe, construction du nombre $\pi$ et le cercle unité

*Dans tous les exercices, on identifie $\mathbb{C}$ à un plan affine réel $P$ et on note*

$$\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{(x,y) \in P \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

*le cercle unité.*

**Exercice 1.** (Fonctions sinus et cosinus).
On rappelle que l'on note

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit également

$$\cos(t) := \Re\mathrm{e}(e^{it}) \quad \text{et} \quad \sin(t) := \Im\mathrm{m}(e^{it})$$

1. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1.$$
2. Prouver que les fonctions cos et sin sont développable en séries entières sur $\mathbb{R}$ est calculer leurs dérivées.
3. Démontrer la *formule de Moivre*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ (\cos(t) + i\sin(t))^n = \cos(nt) + i\sin(nt).$$
4. Démontrer les formules suivantes
$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \quad \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b).$$

**Exercice 2.** (Construction de $\pi$)
Prouver les assertions suivantes :

1. La fonction exp ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$.
2. Il existe un unique nombre réel positif $\pi$ tel que
$$\exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) = i$$
et tel que
$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = 1 \iff z \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$
*(Indication : Pour l'existence, montrer d'abord que* $\cos(2) < -1/3$.*)*
3. La fonction exp est $2i\pi$-périodique.

**Exercice 3.**

1. Montrer que l'application $t \mapsto e^{it}$ est une surjection de $\mathbb{R}$ dans le cercle unité $\mathbb{S}^1$.
2. En déduire que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est surjective.

**Exercice 4.** (Calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$)

1. Soit $u := e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Montrer que $u^4 + u^3 + u^2 + u + 1 = 0$.
2. Posons $a := u^4 + u$ et $b := u^3 + u^2$. Montrer que $a + b = ab = -1$ et en déduire que $a \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.
3. En déduire que
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$
4. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
5. Calculer les cosinus et sinus de $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{3\pi}{5}$.

**Exercice 5.** (Irrationnalité de $\pi$ d'après Niven)
Par l'absurde, supposons qu'il existe deux entiers $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $\pi = \frac{a}{b}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons la fonction polynômiale
$$f_n : x \mapsto \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$
ainsi que
$$F_n : x \mapsto f_n(x) - f_n''(x) + f_n^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_n^{(2i)}(x).$$

1. Montrer que $F_n(0) + F_n(\pi) \in \mathbb{Z}$.
2. Démontrer que l'on a
$$\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\mathrm{d}x = F_n(0) + F_n(\pi).$$
3. En déduire que $F_n(0) + F_n(\pi) \in \mathbb{N}^*$ *(Indication : utiliser le fait que $\pi$ est le plus petit zéro réel de* sin*).*
4. Prouver ensuite que
$$\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\mathrm{d}x \leq \pi\frac{(a\pi)^n}{2^n n!}.$$
5. Conclure en faisant tendre $n$ vers $+\infty$.

**Exercice 6.** Considérons la droite $\mathcal{D}$ de $P$ d'équation $x = 1$.

1. Donner une paramétrisation réelle de la droite $\mathcal{D}$.
2. À partir de cette paramétrisation, trouver une paramétrisation du cercle $\mathbb{S}^1$.
3. En déduire que les points de $\mathbb{S}^1$ à coordonnées rationnelles sont denses (pour la topologie usuelle) dans $\mathbb{S}^1$ *(On pourra remarquer que la paramétrisation précédente est donnée par des fractions rationnelles à coefficients rationnels).*
4. Montrer que $\mathbb{S}^1$ est naturellement muni d'une structure de groupe abélien. Montrer de plus que les opérations de multiplication $\mu : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ et de passage à l'inverse $\iota : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ sont continues pour la topologie usuelle. On dit alors que $\mathbb{S}^1$ et un *groupe topologique.*
5. Montrer que $\mathbb{S}^1$ est compact.
6. Démontrer que l'ensemble des points rationnels de $\mathbb{S}^1$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{S}^1$.
7. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note
$$\mu_n(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ z^n = 1\}$$
l'ensemble des *racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.* Montrer que $\mu_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathbb{S}^1$.
8. Démontrer que $\mu_n(\mathbb{C})$ est cyclique d'ordre $n$.
9. Considérons l'ensemble des racines de l'unité
$$\mu(\mathbb{C}) := \bigcup_{n\geq 1} \mu_n(\mathbb{C}).$$
Prouver que $\mu(\mathbb{C})$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{S}^1$.