TD $n°1$: Séries entières, exponentielle, équations de droites et cercles et théorème de Napoléon

Dans tous les exercices, on dit identifie $\mathbb{C}$ à un plan affine réel P.

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n, \quad \sum_{n\geq 0} n^n z^n, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n, \quad \sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n.$$

Exercice 2. Soit $k \in \{0,1,2\}$ et considérons la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^k}.$$

Calculer le rayon de convergence R_k de cette série en fonction de k et montrer que pour $k=0$ (resp. $k=1$, $k=2$) la série diverge sur le cercle de rayon R_0 (resp. converge en certains points du cercle de rayon R_1, converge en tout point du cercle de rayon R_2).

Exercice 3.

1. Soit $\sum u_n z^n$ une série entière. Montrer que son rayon de convergence est non nul si et seulement s'il existe $q > 0$ tel que
$$\forall n \geq 1,\ |u_n| \leq q^n.$$
2. Soit maintenant une série entière $1 + \sum_{n\geq 1} a_n z^n$ de rayon de convergence non nul et notons S sa somme sur son disque de convergence. Montrer que la fonction $1/S$ est développable en série entière au voisinage de l'origine.
3. En déduire que l'inverse de la somme d'une série entière ne s'annulant pas en 0 est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 4. On note $\exp$ la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{C}$ par : $\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

1. Montrer que $\exp$ est une fonction continue.
2. Montrer que pour tout z, z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z'+z) = \exp(z)\exp(z')$.
3. Montrer que $\exp$ est dérivable de dérivée $z \mapsto \exp(z)$.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de déterminer l'équation complexe d'une droite D de P passant par deux points A et B fixés.

1. On note respectivement a et b les affixes de A et B. Soit M un point d'affixe z distinct de A et de B.
   (a) Montrer que M est sur la droite D si et seulement si $(z-a)(\overline{z}-\overline{b})$ est réel.
   (b) En déduire qu'il existe $\beta \in \mathbb{C}$ et un $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $M \in D$ si et seulement si $\overline{\beta}z + \beta\overline{z} + \gamma = 0$.
2. Retrouver la caractérisation précédente de D à partir d'une de ses équation cartésienne.

Exercice 6.

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $\alpha z\overline{z}+\beta\overline{z}+\overline{\beta}z+\gamma=0$ avec α et γ réels. Décrire géométriquement l'ensemble des solutions de cette équation dans les cas suivants :

$$(a)\ \alpha=\beta=0 \quad (b)\ \alpha=0 \quad (c)\ \alpha\neq 0$$

2. Soit λ un nombre réel positif. Décrire géométriquement l'ensemble $E_\lambda=\{z\in\mathbb{C} : |z-a|=\lambda|z-b|\}$.

Exercice 7. Soient A, B, C trois points de P d'affixes respectives a, b, c. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

$$(a)\ ABC \text{ est équilatéral} \qquad (b)\ \frac{c-a}{b-a}=e^{i\pm\frac{\pi}{3}} \qquad (c)\ \begin{array}{l} aj^2+bj+c=0 \\ \text{ou } aj^2+b+cj=0 \end{array}$$

Exercice 8. Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et A, B deux points du plan. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

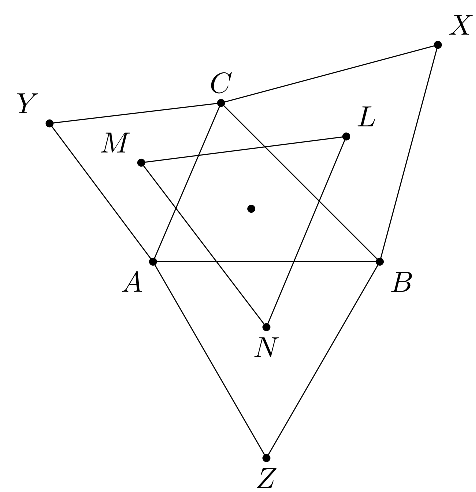
$$\left\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right\rangle=\lambda.$$

Exercice 9. Soient A le point d'affixe $1+i$ et B le point d'affixe $-1+2i$. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que le triangle ABM soit équilatéral.

Exercice 10.

1. Donner l'équation complexe du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $2+i$ et de rayon $\sqrt{5}$. Même question avec le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre $3i$ et de rayon 1. Déterminer l'intersection $\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2$.
2. Donner l'équation complexe de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points d'affixes α et β.
3. Notons $\mathcal{C}$ le cercle de centre $1+i$ et de rayon 1 et $\mathcal{D}$ la droite passant par les points d'affixes 1 et i. Déterminer les images de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ par chacune des transformations suivantes
   (a) $f : z\mapsto\sqrt{2}(1-i)z+i$,
   (b) $g : z\mapsto(1+i)\overline{z+i}$.
4. Fixons $\omega\in\mathbb{C}^\times$ et $k\in\mathbb{R}$. Trouver l'équation complexe des droites orthogonales à la droite d'équation $\omega\overline{z}+\overline{\omega}z=k$.

Exercice 11. *(Théorème de Lagrange-Napoléon)*
Soient trois points A, B et C deux à deux distincts de P, d'affixes respectifs a, b et c. Considérons des points X, Y et Z tels que les triangles BXC, CYA et AZB soient équilatéraux et d'orientations toutes opposées ou toutes égales à celle du triangle ABC. Notons enfin L (resp. M, N) l'isobarycentre de B, X, C (resp. de C, Y, A, de A, Z, B).



1. Montrer que ABC et LMN ont même centre de gravité.
2. Que pouvez-vous dire du triangle LMN ?