Correction du TD 7

Exercice 1.
1. La similitude f est directe par définition, elle est à centre car $a = (1+i) \neq 1$, son unique point fixe est donné par

$$c = \frac{5i}{1-(1+i)} = \frac{5i}{i} = 5$$

Son rapport est $|1+i| = \sqrt{2}$ et son angle est $\arg 1+i = \frac{\pi}{4}$.
2. On pose $z' = f(z)$, on a

$$\begin{aligned} z' = f(z) &\Leftrightarrow z' = (1+i)z + 5i \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1+i}(z' - 5i) = z \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}(z' - 5i) = z \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/4}(z' - 5i) = z \\ &\Leftrightarrow \frac{1-i}{\sqrt{2}}z' - \frac{5i+5}{\sqrt{2}} = z \end{aligned}$$

3. On peut raisonner avec les équations, mais il y a plus simple : soit $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe, et $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

$$|f(z) - f(z')| = |az - az'| = |a||z - z'|$$

donc f multiplie les distances par $|a|$, donc f envoie le cercle de centre c et de rayon r sur le cercle de centre $f(c)$ et de rayon $|a|r$.
En l'occurrence, f envoie (C) sur le cercle de centre $f(0) = 5i$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 2. On confond les points et leurs affixes.
1. Soit $\varphi(z) = az + b$ une similitude directe, on obtient le système

$$\begin{cases} b = 0 \\ a + b = i \\ ai + b = 1 + i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = i \\ ai + b = -1 = 1 + i \end{cases}$$

ce système est contradictoire : il n'existe pas de solutions.
2. Soit $\varphi(z) = az + b$ une similitude directe, on obtient le système

$$\begin{cases} b = 0 \\ ai + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -i \end{cases}$$

On a donc une unique solution $\varphi(z) = -iz$
3. Comme vu à l'exercice précédent, $\varphi : z \mapsto az + b$ envoie le cercle de centre A et de rayon 1 sur le cercle de centre $\varphi(A) = b$ et de rayon $|a|$, on obtient donc ici les conditions $b = 1$ et $|a| = 2$, les similitudes qui conviennent sont donc les similitudes de la forme

$$\varphi(z) = 2e^{i\theta}z + 1, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Exercice 3.
1. On développe

$$\begin{aligned}|z-(1+i)|^2=2 &\Leftrightarrow (z-(1+i))\overline{(z-(1+i))}=2\\ &\Leftrightarrow z\overline{z}-(1+i)\overline{z}-\overline{(1+i)}z+2=2\\ &\Leftrightarrow z\overline{z}-(1+i)\overline{z}-\overline{(1+i)}z=0\end{aligned}$$

2. On pose $z'=f(z)$, on a

$$\begin{aligned}z'=f(z) &\Leftrightarrow z'=\frac{2z+1}{z}\\ &\Leftrightarrow z'z=2z+1\\ &\Leftrightarrow z'z-2z=1\\ &\Leftrightarrow z(z'-2)=1\\ &\Leftrightarrow z=\frac{1}{z'-2}\end{aligned}$$

Et on retrouve bien la forme voulue.

3. On sait que z se trouve sur le cercle $(\mathcal{C})$ si et seulement si $z\overline{z}-(1+i)\overline{z}-\overline{(1+i)}z=0$. En remplaçant z par $f^{-1}(z')$ dans cette équation, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{z'-2}\frac{1}{\overline{z'}-2}-\frac{1+i}{\overline{z'}-2}-\frac{\overline{1+i}}{z'-2}=0 &\Leftrightarrow 1-(1+i)(z'-2)-\overline{(1+i)(z'-2)}=0\\ &\Leftrightarrow 1-(1+i)z'+2(1+i)-\overline{(1+i)}\overline{z'}+2(1-i)=0\\ &\Leftrightarrow -\overline{(1-i)}z'-(1-i)\overline{z'}+5=0\end{aligned}$$

Cette équation est l'équation complexe d'une droite.

Exercice 4.
1. On utilise les relations définissant $\mathbb{H}$, par exemple

$$iji^{-1}=-iji=-ki=-j$$

On obtient au total

$$\begin{array}{lll} iii^{-1}=i & iji^{-1}=-j & iki^{-1}=-k\\ jij^{-1}=-i & jjj^{-1}=j & jkj^{-1}=-k\\ kik^{-1}=-i & kjk^{-1}=-j & kkk^{-1}=k\end{array}$$

2. L'image par s_i de la base $\{i,j,k\}$ est $\{i,-j,-k\}$, la matrice de s_i est donc

$$M_i=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

de même, l'image par s_j (resp. s_j) de $\{i,j,k\}$ est $\{-i,j,-k\}$ (resp. $\{-i,-j,k\}$), d'où les matrices recherchées.

3. On pose $\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$, il s'agit d'un quaternion pur de norme 1, on a donc $\omega^{-1}=-\omega$, l'action par conjugaison de ω sur $\{i,j,k\}$ est donc donnée par

$$\omega i\omega^{-1}=-\frac{1}{2}(i+j)i(i+j)=-\frac{1}{2}(-1-k)(i+j)=-\frac{1}{2}(-i-j-j+i)=-j$$

$$\omega j \omega^{-1} = -\frac{1}{2}(i+j)j(i+j) = -\frac{1}{2}(k-1)(i+j) = -\frac{1}{2}(j-i-i-j) = -i$$
$$\omega k \omega^{-1} = -\frac{1}{2}(i+j)k(i+j) = -\frac{1}{2}(-j+i)(i+j) = -\frac{1}{2}(k-1+k+1) = -k$$

On obtient donc la matrice recherchée, qui est une rotation d'axe $i+j$ et d'angle π.