Correction du TD 6

† *Birapport, homographies*

Exercice 1. On a

$$[b,a,c,d] = \frac{b-c}{b-d}\frac{a-d}{a-c} = \frac{a-d}{a-c}\frac{b-c}{b-d} = [a,b,c,d]^{-1} = [a,b,d,c]$$

$$\begin{aligned}
1-[a,b,c,d] &= 1 - \frac{a-c}{a-d}\frac{b-d}{b-c} \\
&= 1 + \frac{a-c}{a-d}\frac{b-d}{c-b} \\
&= \frac{(a-d)(c-b)+(a-c)(b-d)}{(a-d)(c-b)} \\
&= \frac{ac-cd-ab+bd+ab-bc-ad+cd}{(a-d)(c-b)} \\
&= \frac{ac+bd-bc-ad}{(a-d)(c-b)} \\
&= \frac{a-b}{a-d}\frac{c-d}{c-b} = [a,c,b,d] = [d,b,c,a]
\end{aligned}$$

$$-\frac{[a,b,c,d]}{[a,c,b,d]} = -\frac{a-c}{a-b}\frac{b-d}{c-d} = [a,d,c,b] = [c,b,a,d]$$

On peut faire agir $\mathfrak{S}_4$ sur l'ensemble des configurations de (a,b,c,d) (en changeant l'ordre justement, par exemple la transposition $(1\ 2)$ envoie (a,b,c,d) sur (b,a,c,d)), on vient de calculer l'action des transpositions, qui engendrent $\mathfrak{S}_4$. Autrement dit, l'action de $\mathfrak{S}_4$ sur $x=[a,b,c,d]$ a pour orbite

$$x, \frac{1}{x}, 1-x, \frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x}, \frac{x}{x-1}$$

En fait, on peut même montrer que l'action de $\mathfrak{S}_4$ se factorise par une action de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 2.
1. Premièrement, le fait que M' soit sur la droite (ΩM) indique que z' est de la forme $c+a(z-c)$ avec $a\in\mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\rangle &= \mathrm{Re}((z-c)\overline{(z'-c)}) \\
&= \mathrm{Re}((z-c)\overline{a(z-c)}) \\
&= \mathrm{Re}(a|z-c|^2) = a|z-c|^2
\end{aligned}$$

Ceci est égal à r si et seulement si $a=\frac{r}{|z-c|^2}$, on a alors

$$z' = \frac{r}{(z-c)\overline{(z-c)}}(z-c)+c = \frac{r}{\overline{z-c}}+c$$

2. On peut directement calculer que $i(\Omega,r)$ est une involution grâce à la formule de la question précédente. Mais on peut également revenir à la définition : le point M est sur la droite $(\Omega M')$, et on a $\langle\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega M}\rangle = r$ par

hypothèse sur M', donc on a bien $M = i(\Omega, r)(M')$ et $i(\Omega, r)$ est une involution.
Un point $M \in P \setminus \{\Omega\}$ est donc dans l'image de $i(\Omega, r)$, car il est l'image de son image (car $i(\Omega, r)$ est une involution), ensuite, on montre que Ω n'est pas dans l'image. Si M est tel que $i(\Omega, r)(M) = \Omega$, on a

$$c = \frac{r}{\overline{z-c}} + c \Rightarrow \frac{r}{\overline{z-c}} = 0$$

ce qui n'est pas possible car $r \neq 0$, donc l'image de $i(\Omega, r)$ est $P \setminus \{\Omega\}$.
3. On doit montrer que $i(\Omega, r)$ préserve la réalité du birapport. Soient donc s, u, v, w tels que leur birapport soit réel, on note s', u', v', w' leurs images par $i(\Omega, r)$, on a

$$[s', u', v', w'] = \frac{s'-v'}{s'-w'}\frac{u'-w'}{u'-v'}$$

On a

$$\begin{aligned} s'-v' &= r\overline{\left(\frac{1}{s-c} - \frac{1}{v-c}\right)} = r\overline{\left(\frac{v-c-s+c}{(s-c)(v-c)}\right)} = r\frac{\overline{v-s}}{\overline{(s-c)(v-c)}} & u'-w' &= r\frac{\overline{w-u}}{\overline{(u-c)(w-c)}} \\ s'-w' &= r\frac{\overline{w-s}}{\overline{(s-c)(w-c)}} & u'-v' &= r\frac{\overline{v-u}}{\overline{(u-c)(v-c)}} \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} [s', u', v', w'] &= \frac{\overline{v-s}}{\overline{(s-c)(v-c)}}\frac{\overline{w-u}}{\overline{(u-c)(w-c)}}\frac{\overline{(s-c)(w-c)}}{\overline{w-s}}\frac{\overline{(u-c)(v-c)}}{\overline{v-u}} \\ &= \frac{\overline{s}-\overline{v}}{\overline{s}-\overline{w}}\frac{\overline{u}-\overline{w}}{\overline{u}-\overline{v}} \\ &= \overline{[s, u, v, w]} \end{aligned}$$

Qui est réel si $[s, u, v, w]$ est réel.
4. Notons z, ω les affixes de M et N, et z', ω' leurs images par $i(\Omega, r)$, on a

$$\begin{aligned} i(M)i(N) = |\omega' - z'| &= \left|\frac{r}{\overline{z-c}} - \frac{r}{\overline{\omega-c}}\right| \\ &= |r|\left|\frac{1}{z-c} - \frac{1}{\omega-c}\right| \\ &= |r|\left|\frac{\omega-c-z+c}{(z-c)(\omega-c)}\right| \\ &= |r|\left|\frac{\omega-z}{(z-c)(\omega-c)}\right| \\ &= |r|\frac{MN}{(\Omega M)(\Omega N)} \end{aligned}$$

Exercice 3. D'après l'exercice précédent, la distance entre Ω et M' est donnée par

$$|z'-c| = \frac{|r|}{|z-c|} \Rightarrow |z'-c||z-c| = r$$

On a donc $|z-c| < \sqrt{r} \Leftrightarrow |z'-c| > \sqrt{r}$. Ensuite, pour $z = c + \sqrt{r}e^{i\theta} \in \mathcal{C}(\Omega, \sqrt{r})$, on a

$$z' = \frac{r}{\overline{\sqrt{r}e^{i\theta}}} + c = c + \sqrt{r}e^{i\theta} = z$$

† *Homographies, retour du projectif*

Exercice 4.

1. La fonction φ est définie par une fraction, donc $\varphi(z)$ est défini si et seulement si $cz+d \neq 0$, autrement dit $z \neq \frac{-d}{c}$.

2. On a

$$\begin{aligned} z' = \frac{az+b}{cz+d} &\Leftrightarrow z'(cz+d) = az+b \\ &\Leftrightarrow czz' - az = b - dz' \\ &\Leftrightarrow z(cz'-a) = b - dz' \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-dz'+b}{cz'-a} \end{aligned}$$

qui n'est défini que si $z' \neq \frac{a}{c}$.

3. La formule de la question précédente donne une réciproque $\varphi^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$, que l'on étend directement.

4. On a déja vu qu'une homographie admet une réciproque, qui est une homographie, et ensuite, pour deux homographies

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{et} \quad z \mapsto \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

la composée est donnée par

$$\begin{aligned} z \mapsto \frac{a'\frac{az+b}{cz+d} + b'}{c'\frac{az+b}{cz+d} + d'} &= \frac{\frac{aa'z+a'b}{cz+d} + \frac{b'cz+b'd}{cz+d}}{\frac{c'az+c'b}{cz+d} + \frac{d'cz+d'd}{cz+d}} \\ &= \frac{aa'z + a'b + b'cz + b'd}{c'az + c'b + d'cz + d'd} \\ &= \frac{(aa'+b'c)z + a'b + b'd}{(c'a+d'c)z + c'b + d'b} \end{aligned}$$

Donc c'est aussi une homographie. Enfin bien-sûr, l'identité est une homographie.

Exercice 5.

1. On distingue deux cas, selon si $c = 0$ ou non.
Si $c = 0$, alors $\varphi(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ est une similitude, pour lesquelles le résultat est connu.
Si $c \neq 0$, on a

$z \mapsto cz$	cz
$z \mapsto z+d$	$cz+d$
$z \mapsto \overline{z}$	$\overline{cz+d}$
$z \mapsto \frac{1}{z}$	$\dfrac{1}{\overline{cz+d}}$
$z \mapsto \left(\frac{-da}{c} + b\right) z$	$\dfrac{\frac{-da}{c}+b}{\overline{cz+d}}$
$z \mapsto z + \frac{a}{c}$	$\dfrac{az+b}{cz+d}$

2. On sait que les translations, inversions, la conjugaison, et les homothéties rotations préservent les cercles et droites, c'est donc aussi le cas des homographies par la question précédente.

3.a) Remarquons que p est bien défini : la condition pour que $p(M)$ soit une homographie est que $ad - cb$ soit non nul, ce qui équivaut à $\det(M) \neq 0$, donc à $M \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$. Ensuite, si $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ est une autre matrice, on a vu dans l'exercice que la composée des homographies $\frac{az+b}{cz+d}$ et $\frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ est donnée par

$$\frac{(aa'+b'c)z+a'b+b'd}{(c'a+d'c)z+c'b+d'b} = P\begin{pmatrix} aa'+b'c & a'b+b'd \\ c'a+d'c & c'b+d'd \end{pmatrix} = P\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

Donc on a bien affaire à un morphisme de groupes.
b) Il est clair que $p\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \frac{\lambda z}{\lambda} = Id$, réciproquement, si $p(M) = p\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Id$, alors $p(M)(0) = \frac{b}{d} = 0$ et $b = 0$, $p(M)(1) = \frac{a}{c+d} = 1$ donc $a = c+d$, $p(M)(-1) = \frac{-a}{-c+d} = -1$, donc $a = d-c$, $c = 0$ et $a = d = \lambda$.
c) Le morphisme p est surjectif par construction, donc on applique le premier théorème d'isomorphisme.

Exercice 6.
1. Si $z' = 0$, on a $[z : z'] = [1 : 0]$ et

$$\phi([1:0]) = f\varphi f^{-1}([1:0]) = f\varphi(\infty) = f(a/c) = [a/c : 1] = [a : c]$$

Ensuite, si $z' \neq 0$, on a

$$\phi([z:z']) = f\varphi\left(\frac{z}{z'}\right)$$

Si $\frac{z}{z'} = \frac{-d}{c}$, ceci est égal à $f(\infty) = [1:0] = [az+bz' : 0] = [az+bz', cz+dz']$ car $cz+dz' = 0$ par hypothèse.
Si $\frac{z}{z'} \neq \frac{-d}{c}$, ceci est égal à

$$f\left(\frac{a\frac{z}{z'}+b}{c\frac{z}{z'}+d}\right) = \left[\frac{a\frac{z}{z'}+b}{c\frac{z}{z'}+d} : 1\right] = \left[a\frac{z}{z'}+b : c\frac{z}{z'}+d\right] = [az+bz' : cz+dz']$$

Dans tous les cas, la formule proposée est vérifiée : on a maintenant une définition uniforme des homographies, sans avoir à utiliser des disjonctions de cas...

2. Par la question précédente, une homographie envoie $[1:0]$ sur $[a, c]$, qui est égal à $[1:0]$ si et seulement si $c = 0$, autrement dit si et seulement si c'est une similitude directe.

3. Par la question 1, une homographie envoie $[0:1]$ sur $[b:d]$, qui est égal à $[0:1]$ si et seulement si $b = 0$, autrement dit si elle est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{d}{a} \end{pmatrix}$.

Exercice 7. On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2+cb & ba+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+cb & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

Ceci est égal à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ si et seulement si

$$\begin{cases} a^2+bc = d^2+bc \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \end{cases}$$

qui est équivalent au système proposé.
On distingue deux cas :

- Si $a+d = 0$, donc $a = -d$, alors le système est vérifié.
- Si $a+d \neq 0$, on a $a^2 = d^2$ si et seulement si $a = d$, et les deux autres équations donnent $b = c = 0$.