# TD 5 - Algèbre des quaternions, applications géométriques

**Exercice 1.** On a vu (il y a maintenant quelques semaines) que $\mathbb{S}^1$ est décrit comme $\{e^{i\theta} = \cos(\theta)+i\sin(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, avec la formule de multiplication $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.
On sait que l'on peut représenter un nombre complexe $z = a+ib$ par la matrice réelle $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, le déterminant de cette matrice étant $|z|^2$.
On cherche donc à étudier le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & SO_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \longmapsto & a+ib \end{array}$$

On commence par constater que $\varphi$ est bien défini : si $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est dans $SO_2(\mathbb{R})$, alors $\det(M) = 1 = a^2+b^2$, donc $a+ib \in \mathbb{S}^1$. On montre ensuite que $\varphi$ est un morphisme de groupes : soient $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ dans $SO_2(\mathbb{R})$, on a

$$\varphi(MN) = \varphi\left(\begin{pmatrix} ac-bd & -bc-ad \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix}\right) = ac-bd+i(bc+ad) = (a+ib)(c+id) = \varphi(M)\varphi(N)$$

Donc $\varphi$ est bien un morphisme de groupes. Pour montrer que $\varphi$ est un isomorphisme, il reste à montrer que $\varphi$ est une bijection. Notons déjà que $\varphi$ est injective : si $\varphi(M) = a+ib = 1$, alors $a = 1, b = 0$ et $M = I_2$. Ensuite, si $z = e^{i\theta} = \cos(\theta)+i\sin(\theta) \in \mathbb{S}^1$, on écrit $z$ matriciellement

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

il reste à voir que ceci est dans $SO_2(\mathbb{R})$, on a déjà $\det(M) = \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) = 1$, et ensuite

$$\begin{aligned} {}^tMM &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta)+\sin(\theta)\cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\cos(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta)+\cos^2(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

Et de même $M^tM = I_2$, donc $M \in SO_2(\mathbb{R})$ et on a terminé. Pour la continuité, on a calculé directement $\varphi$ et $\varphi^{-1}$, et on a vu qu'ils dépendaient polynomialement des coordonnées : ce sont des applications continues.

**Exercice 2.** (Versions matricielles de $\mathbb{H}$)
1.a) Les relations que j'ai donné ne sont pas minimales (j'ai mis ce système car c'est pour moi le plus logique à retenir et à utiliser). On lui substitue le système

$$-1 = I^2 = J^2 = K^2 = IJK$$

Bien-sûr c'est du calcul matriciel rébarbatif, qu'il ne sert pas vraiment de corriger sur papier...
Par contre on peut faire quelque chose qui n'a rien à voir, et montrer que les deux systèmes de relations que j'ai

donné sont équivalent !
Selon le système de la feuille (que j'appellerai "système TD"), on a déjà $-1 = I^2 = J^2 = K^2$, et enfin $IJK = KK = -1$, donc le système TD entraîne le système du corrigé.
Réciproquement, le système du corrigé entraîne également $-1 = I^2 = J^2 = K^2$, et on a par ailleurs

$$IJKK = -IJ = -K \quad IIJK = -JK = -I$$

donc $IJ = K$ et $JK = I$, on a aussi

$$\begin{aligned} IJK = -1 &\Rightarrow -JK = -I \\ &\Rightarrow -JKI = 1 \\ &\Rightarrow KI = J \end{aligned}$$

Donc on a bien les relations $IJ = K, JK = I, KI = J$.
Ensuite, comme $IJK = -1$, on a $(IJK)(KJI) = (-1)^3 = -1 = IJK$, donc $KJI = 1$, on obtient donc $KJ = -I$ et $JI = -K$n et $IK = -J$.
On a donc bien montré que le système TD est équivalent au système du corrigé, ils donnent deux ***présentations de l'algèbre des quaternions***.
b). Ici encore c'est un calcul

$$\begin{aligned} M(q) &= a1 + bI + cJ + dK \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ -d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & d & a & -b \\ -d & c & b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Du coup, on obtient aussi

$$M(\overline{q}) = M(a, -b, -c, -d) = \begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ -b & a & d & c \\ -c & -d & a & b \\ d & -c & -b & a \end{pmatrix} = {}^tM(q)$$

c). On a décrit la conjugaison des quaternions via une opération matricielle connue, qui est la transposition, or on sait que la transposition est anticommutative : ${}^t(AB) = {}^tB^tA$, donc

$$M(\overline{q_1q_2}) = {}^tM(q_1q_2) = {}^t(M(q_1)M(q_2)) = {}^tM(q_2)^tM(q_1) = M(\overline{q_2})M(\overline{q_1}) = M(\bar{q_2}\bar{q_1})$$

d'où le résultat.
2.a) Là encore ce sont des calculs rébarbatifs, donc je vais encore préférer être hors sujet. On a vu qu'un nombre complexe $a + ib$ pouvait se représenter par une matrice réelle $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, si on remplace dans les matrices $I, J, K$ les nombres complexes par leurs représentations matricielles, on retrouve les matrices du cas réel ! Ca permet d'ailleurs de montrer directement la question.
b) C'est très facile : on a

$$q = a + ib + jc + kd = a + ib + jc - jid = a + ib + j(c - id)$$

On vient en fait de montrer que $\mathbb{H}$ peut se voir comme une $\mathbb{C}$ algèbre de dimension 2.
c). On a

$$\begin{aligned} M(q) &= a1 + bI + cJ + dK \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+ib & -c-id \\ c-id & a-ib \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Exercice 3.**
1. Dans l'exercice précédent, on a

$$N(q) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = \det(M(q))$$

Or on sait déjà que le déterminant est multiplicatif : on a

$$N(qq') = \det(M(qq')) = \det(M(q)M(q')) = \det(M(q))\det(M(q')) = N(q)N(q')$$

2. Par définition, on a

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists q \in \mathbb{H} \mid N(q) = n\}$$

soient $n, m \in \Sigma$, il existe $q, q'$, à coefficients entiers, tels que $N(q) = n$ et $N(q') = m$, on a alors $N(qq') = N(q)N(q') = mm$, et comme $qq'$ est aussi un quaternion à coefficients entiers, $mn \in \Sigma$, qui est donc stable par multiplication.

**Exercice 4.**
1. L'ensemble $G$ est défini par

$$G := \{q = a + ib + jc + kd \in \mathbb{H} \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$$

l'identification $G \simeq \mathbb{R}^4$ envoyant $a + ib + jc + kd$ sur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, $G$ est bien envoyé sur la sphère $\mathbb{S}^3$.

2. La $\mathbb{R}$-linéarité de $S_q$ découle des propriétés de la multiplication :

$$S_q(\lambda q' + \mu q'') = q(\lambda q' + \mu q'')\overline{q} = \lambda qq'\overline{q} + \mu qq''\overline{q} = \lambda S_q(q') + \mu S_q(q'')$$

Il est immédiat que $S_q$ est un isomorphisme : son inverse est $S_{q^{-1}} = S_{\overline{q}}$. L'application $q \mapsto S_q$ est donc une application de $G$ vers les automorphismes linéaires de $\mathbb{H}$, en bijection avec $\mathrm{Gl}_4(\mathbb{R})$ (qui sont les automorphismes linéaires de $\mathbb{R}^4$).

3. Il est facile de vérifier que $S$ est un morphisme de groupes : soient $q, q' \in G$, on a

$$S_{qq'}(q'') = (qq')q''\overline{qq'} = qq'q''\bar{q'}\overline{q} = qS_{q'}(q'')\overline{q} = S_q(S_{q'}(q'')) = S_q \circ S_{q'}(q'')$$

Ensuite, pour le noyau, on sait que $S_q(q') = q'$ si et seulement si $q$ et $q'$ commutent, on a donc

$$\mathrm{Ker}\ S = \{q \in G \mid \forall q' \in \mathbb{H}, qq' = q'q\} = Z(\mathbb{H}) \cap G = \mathbb{R} \cap G = \{\pm 1\}$$

4. On sait que le groupe orthogonal $O_4(\mathbb{R})$ est constitué des matrices qui préservent la norme usuelle de $\mathbb{R}^4$, qui donne $\sqrt{N}$ sur $\mathbb{H}$. Or, on a $N(S_q(q')) = N(q)N(q')N(\overline{q}) = N(q')$, donc $S_q$ préserve la norme, et se trouve dans $O_4(\mathbb{R})$.

Ensuite, l'espace $P$ des quaternions purs est défini par $q+\overline{q}=0$ (comme pour les nombres complexes...) or, on a

$$S_q(q')+\overline{S_q(q')}=qq'\overline{q}+\overline{qq'\overline{q}}=qq'\overline{q}+q\overline{q'}\overline{q}=q(q'+\overline{q'})\overline{q}$$

donc si $q'\in P$, on a également $S_q(q')\in P$.

5. On a une décomposition en somme orthogonale $\mathbb{H}=\mathbb{R}\oplus P$. On a vu que $S_q$ fixe $\mathbb{R}$ ponctuellement, et fixe globalement $P$, autrement dit, la matrice associée à $S_q$ est de la forme

$$S_q=\begin{pmatrix}1&0\\0&s_q\end{pmatrix}$$

Et comme $S_q\in O_4(\mathbb{R})$, on a bien $s_q\in O_3(\mathbb{R})$. Ensuite, on a clairement $S_q=I_4$ si et seulement si $s_q=I_3$, donc $\mathrm{Ker}\ s=\{\pm 1\}$.

6. C'est très long en calcul, pour bien faire il faut calculer tous les coefficients de la matrice $s_q$, on va admettre que j'ai tout bien fait du premier coup et obtenu

$$s_{a+ib+jc+kd}=\begin{pmatrix}a^2+b^2-c^2-d^2&2(bc-ad)&2(ac+bd)\\2(bc-ad)&a^2-b^2+c^2-d^2&2(cd-ab)\\2(bd-ac)&2(ab+cd)&d^2+a^2-b^2-c^2\end{pmatrix}$$

On constate que les coordonnées de $s$ sont continues, donc $s$ est continue.

7. Considérons la composition de $s$ et du déterminant, on obtient un morphisme continu $G\to\{\pm 1\}$. Comme $G$ est connexe (homéomorphe à $\mathbb{S}^3$), l'image de cette application continue est un singleton, et comme $\det(s(1))=1$, ce singleton est $\{1\}$ et pas $\{-1\}$, donc $s(G)\subset\mathrm{Ker}\ \det=SO_3(\mathbb{R})$.

8. Soit $p\in P\cap G$, on commence par noter que $s_p(p)=pp\overline{p}=p$, donc $s_p$ admet un point fixe $p$ : il s'agit d'une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(p)$.
Ensuite, comme $p\in G\cap P$, on a $p^{-1}=\overline{p}=-p$ donc $p^2=-p\overline{p}=-1$ et $(s_p)^2=s_{p^2}=s_{-1}=1$, donc $s_p$ est une involution et une rotation : c'est une rotation d'angle $\pi$ : un renversement.

9. Il suffit de montrer que $\mathrm{Im}\, s$ contient tous les renversements (car ceux-ci engendrent $SO_3(\mathbb{R})$), soit donc un renversement d'axe $p$ avec $p\in P$, le renversement voulu est obtenu par $s_{p/\sqrt{N(p)}}$

10. Le morphisme $s$ est surjectif et admet $\{\pm 1\}$ comme noyau, on conclut par le premier théorème d'isomorphisme.

11. L'homéomorphisme entre $G$ et $\mathbb{S}^3$ permet de munir ce dernier d'une structure de groupe, et on conclut par la question précédente.

**Exercice 5.**
1. On a

$$\overline{q}=a-ib-jc-kd=a-ib+j(-c+id)=\overline{\alpha}-j\overline{\beta}$$

donc

$$M(\overline{q})=\begin{pmatrix}\overline{\alpha}&\beta\\-\overline{\beta}&\alpha\end{pmatrix}={}^t\overline{M(q)}$$

2. Un quaternion est de norme 1 si et seulement si $\overline{q}=q^{-1}$, ce qui se déduit directement de la question précédente.

3. On sait déjà que $M$ constitue un morphisme injectif (d'algèbre), en particulier sa restriction à $G$ est un morphisme de groupes, à valeur dans $U_2(\mathbb{C})$. On a de plus $\det(M(\alpha,\beta))=\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=|\alpha|^2+|\beta|^2$, donc si $q\in G$, on a $\det(M(q))=1$ et $M(q)\in SU_2(\mathbb{C})$.

Soit $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, on a

$$I_2=M{}^t\overline{M}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{a}&\overline{c}\\\overline{b}&\overline{d}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|a|^2+|b|^2&a\overline{c}+b\overline{d}\\\overline{a}c+\overline{b}d&|c|^2+|d|^2\end{pmatrix}\text{ et }\det(M)=ad-bc=1$$

On a en particulier un système linéaire

$$\begin{cases} \overline{a}c + \overline{b}d = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{b} \\ \overline{a} \end{pmatrix}$$

et donc

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = M(a,c)$$

5. On a montré dans la question précédente que $SU_2(\mathbb{C})$ est l'image du morphisme $q \mapsto M(q)$, comme ce morphisme est injectif, on a $SU_2(\mathbb{C}) \simeq G$, d'où le résultat.