Correction TD4

† *Actions de groupes et espaces projectifs*

Exercice 1.

1. Cela vient directement de la définition d'un corps : la multiplication est associative par définition d'un anneau, il existe un élément neutre (noté 1) par définition d'un anneau unitaire, et tout élément est inversible par définition d'un corps. En fait, on a même que $\Bbbk^*$ est un groupe abélien (ce dernier point fait un tout petit peu débat : certaines références ne demandent pas qu'un corps soit commutatif).

2. L'action est donnée par

$$\forall \lambda \in \Bbbk^*, x = (x_0, \cdots, x_n) \in \Bbbk^{n+1} \setminus \{0\}, \quad \lambda.x = (\lambda x_0, \cdots, \lambda x_n)$$

On remarque bien que cette application préserve le fait que les x_i soient non tous nuls (justement car $\lambda \in \Bbbk^*$). Montrons qu'il s'agit là d'une action de groupe

- Pour $x \in \Bbbk^{n+1} \setminus \{0\}$, on a bien sur $1.x = x$, justement car 1 est l'élément neutre de $\Bbbk$.
- Soient $\lambda, \mu \in \Bbbk^*$, pour $x \in \Bbbk^{n+1} \setminus \{0\}$, on a

$$\begin{aligned} \lambda.(\mu.x) &= \lambda.(\mu x_0, \cdots, \mu x_n) \\ &= (\lambda(\mu x_0), \cdots, \lambda(\mu x_n)) \\ &= ((\lambda\mu)x_0, \cdots, (\lambda\mu)x_n) \\ &= (\lambda\mu).(x_0, \cdots, x_n) = (\lambda\mu).x \end{aligned}$$

Ce qui montre bien le résultat voulu.

Cela revient simplement à dire qu'un vecteur non nul de $\Bbbk^{n+1}$ engendre une droite vectorielle bien définie, et deux vecteurs engendrent la même droite si et seulement si ils sont colinéaires, ce qui est bien la relation proposée.

4. On peut toujours considérer l'application $x \mapsto \mathrm{Vect}(x)$, qui prend un élément de $\Bbbk^{n+1} \setminus \{0\}$ et donne la droite vectorielle qu'il engendre. Il reste à montrer que cette application induit la bijection souhaitée, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(a) = \mathcal{O}(b) &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \Bbbk^* \mid \lambda.a = b \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Vect}(a) = \mathrm{Vect}(b) \end{aligned}$$

Donc l'application étudiée s'induit sur l'espace des orbites en une bijection.

Exercice 2.

1. C'est à nouveau une action déjà connue, il s'agit simplement de comprendre que c'était une action de groupe depuis le départ.

- L'identité I_n est bien sur telle que $I_n.x = x$ pour $x \in \Bbbk^n$.
- Le produit des matrices est associatif, donc $M.(N.x) = MNx = M.(N.x)$, ce qui prouve bien que l'on a une action de groupe.

2. Premièrement, il est clair que, pour $M \in \mathrm{Gl}_n(\Bbbk)$, on a $M.0 = 0$, donc l'orbite de 0 est bien réduite à $\{0\}$. Ensuite, soit $x \in \Bbbk^n \setminus \{0\}$, on sait par le théorème de la base incomplète que x se complète en $(x, x_2, \cdots, x_n)$ une base de k^n. Ces vecteurs, vus comme des matrices de taille $n \times 1$, forment les colonnes d'une matrice M de $\mathrm{Gl}_n(\Bbbk)$, en notant $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, on a $M.e_1 = x$, donc x est dans l'orbite de e_1. Comme ceci est vrai pour tout $x \in \Bbbk^n \setminus \{0\}$, tous ces éléments sont dans la même orbite sous l'action de M.

3. En posant $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\Bbbk^n$, on obtient que Me_i est la i-ème colonne de M, comme par hypothèse $Me_i = e_i$, la i-ème colonne de M doit être e_i, autrement dit $M = I_n$.

Exercice 3.

1. Cela vient du fait que l'action de $\mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{k})$ sur $\mathbb{k}^{n+1}$ est ***linéaire*** :

$$\forall x, y \in \mathbb{k}^{n+1}, \lambda, \mu \in \mathbb{k}, M \in \mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{k}), \quad M(\lambda x + \mu y) = \lambda Mx + \mu My$$

En particulier, si x et y sont colinéaires, il existe $\lambda \in \mathbb{k}$ tel que $x = \lambda y$, alors $Mx = M(\lambda y) = \lambda(My)$, donc Mx et My sont colinéaires.

Soient $\mathrm{Vect}(x), \mathrm{Vect}(y) \in \mathbb{k}P^n$ deux droites vectorielles, on a $M(\mathrm{Vect}(x)) = \mathrm{Vect}(Mx)$, on en déduit donc l'action voulue :

$$M.\mathrm{Vect}(x) := \mathrm{Vect}(Mx)$$

il s'agit bien d'une action de groupe car l'action de $\mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{k})$ sur $\mathbb{k}^{n+1}$ est une action de groupe (le seul point peu clair est le fait que notre action soit bien définie, ce que nous avons déjà montré).

2. Premièrement, H contient I_{n+1} (pour $\lambda = 1$), ensuite, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{k}^*$, on a

$$(\lambda I_{n+1})(\mu I_{n+1}) = (\lambda\mu) I_{n+1} \in H \quad \text{et} \quad (\lambda I_{n+1})^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_{n+1} \in H$$

Donc H est bien un sous-groupe de $\mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{k})$ (il est en fait isomorphe à $\mathbb{k}^*$).

3. Supposons que $M \in \mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{k})$ laisse toutes les droites vectorielles invariantes. Pour $x, y \in \mathbb{k}^{n+1}$ non colinéaires (cela existe car $n \geqslant 1$), on a

$$M(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y$$

comme x et y sont non colinéaires, ceci est l'égalité de deux décompositions sur une base, on en déduit $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$. Enfin, pour $\mu \in \mathbb{k}^*$, on a $\lambda_{\mu x} = \lambda_y = \lambda_x$ car μx et y sont non colinéaires.

Donc $\lambda_x = \lambda$ ne dépend pas de x, ce qu'il fallait démontrer.

4. On sait déjà que $\mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{k})$ agit sur $\mathbb{k}P^n$, autrement dit il existe un morphisme de groupes $\mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{k}) \to \mathfrak{S}(kP^n)$, il suffit pour conclure de montrer que H est le noyau de ce morphisme, autrement dit que $M \in \mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{k})$ agit trivialement sur $\mathbb{k}P^n$ si et seulement si $M \in H$.

Par définition, M agit trivialement sur $\mathbb{k}P^n$ si et seulement si M stabilise toutes les droites vectorielles, on conclut par la question précédente que ceci équivaut à $M \in H$.

Exercice 4.

1. On commence par paramétriser la droite NP : un point de la droite NP s'écrit comme $N + \lambda\overrightarrow{PN}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on en déduit la paramétrisation

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ 1 + \lambda(t-1) \end{pmatrix}$$

Cette droite intersecte l'hyperplan $\mathcal{P}$ si et seulement si $1 + \lambda(t-1) = 0$, comme $P \neq N$, on a $t \neq 1$ et ceci équivaut à $\lambda = \frac{1}{1-t}$, le point $\pi_N(P)$ est alors donné par

$$\pi_N(P) = N + \frac{1}{1-t} P = \begin{pmatrix} \frac{x}{1-t} \\ \frac{y}{1-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui correspond au point complexe $\pi_N(P) = \frac{x+iy}{1-t}$.

2. Vu comme un point du plan $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$, z a pour coordonnées $(u, v, 0)$, la droite allant de ce point vers N est paramétrée par

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} \lambda u \\ \lambda v \\ 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Un point de cette droite se trouve dans $\mathbb{S}^2$ si et seulement si

$$\lambda^2 u^2 + \lambda v^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2(1+|z|^2) - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda(1+|z|^2)-2) = 0$$

Ceci arrive donc quand $\lambda = 0$ (ce qui correspond au point N), et quand $\lambda = \frac{2}{1+|z|^2}$, on en déduit donc

$$\pi_N^{-1}(z) = \frac{1}{1+|z|^2}\begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ |z|^2-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+|z|^2}\begin{pmatrix} z+\overline{z} \\ i(\overline{z}-z) \\ |z|^2-1 \end{pmatrix}$$

3. On commence par remarquer que π_N est bien une bijection : on a construit dans la question précédente l'application π_N^{-1}, qui à z associe $(Nz) \cap \mathbb{S}^2$.
L'extension de π_N à $\mathbb{S}^2$ se fait en fixant l'image de N, seul point qui n'est pas dans le domaine de définition de π_N, il suffit de fixer son image comme étant le point formel ∞.
L'aspect « bijection »(autrement dit d'« isomorphisme d'ensemble ») est très simple, c'est l'aspect « homéomorphisme »(donc « isomorphisme d'espace topologique ») qui est beaucoup plus difficile, notamment car il faut munir $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ d'une topologie convenable !).

Exercice 5.
1. On va construire la bijection réciproque : soit $X = [z : z'] \in \mathbb{C}P^1$,

- Si $z = 0$, alors $z' \neq 0$ et $X = [0 : z'] = [0 : 1]$, pose alors $g(X) = \infty$
- Si $z \neq 0$, alors $X = [1 : \frac{z'}{z}]$, on pose alors $g(X) = \frac{z'}{z}$, on remarque que ce quotient ne dépend pas des coordonnées homogènes choisies pour représenter X.

L'application g obtenue est bien définie et clairement la réciproque de f.

2. On a vu dans l'exercice précédent une bijection $\pi_N : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et on vient de voir une bijection $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C}P^1$, on obtient la bijection voulue par composition, avec

$$f \circ \pi_N(x,y,t) = \begin{cases} f(\infty) & \text{si } t = 1 \\ f\left(\frac{x+iy}{1-t}\right) & \text{si } t \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} [0:1] & \text{si } t = 1 \\ \left[1 : \frac{x+iy}{1-t}\right] & \text{si } t \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} [0:1] & \text{si } t = 1 \\ [1-t : x+iy] & \text{si } t \neq 1 \end{cases}$$

3. On utilise à nouveau la formule magique pour la bijection réciproque d'une composée : $(f \circ \pi_N)^{-1} = \pi_N^{-1} \circ f^{-1}$ (si vous regardez bien, c'est la même formule que l'inverse d'un produit dans un groupe !)
On a donc

$$\pi_N^{-1} \circ f^{-1}([z:z']) = \begin{cases} \pi_N^{-1}(\infty) & \text{si } z = 0 \\ \pi_N^{-1}(\frac{z}{z'}) & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

On a

$$\pi_N^{-1}\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{1}{1+\frac{|z'|^2}{|z|^2}}\begin{pmatrix} \frac{z'}{z} + \overline{\frac{z'}{z}} \\ -i\left(\frac{z'}{z} - \overline{\frac{z'}{z}}\right) \\ \frac{|z'|^2}{|z|^2} - 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$\frac{1}{1+\frac{|z'|^2}{|z|^2}} = \frac{|z|^2}{|z|^2+|z'|^2} \text{ et } \frac{z'}{z} + \frac{\overline{z'}}{\overline{z}} = \frac{z'\overline{z} + z\overline{z'}}{z\overline{z}} = \frac{z'\overline{z} + z\overline{z'}}{|z|^2} \text{ et } -i\left(\frac{z'}{z} - \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}\right) = -i\frac{z'\overline{z} - z\overline{z'}}{|z|^2}$$

D'où

$$\pi_N^{-1}\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{1}{|z|^2+|z'|^2}\begin{pmatrix} z'\overline{z} + z\overline{z'} \\ i(z\overline{z'} - z'\overline{z}) \\ |z'|^2 - |z|^2 \end{pmatrix}$$

Remarquez à quelle point cette magnifique formule ne dépend pas du choix de coordonnées homogènes : remplacez (z, z') par $(\lambda z, \lambda z')$ et vous aurez exactement le même résultat !