Correction TD 3

Cercles, droites et équations :

Ceci est un rappel des différents liens entre les équations complexes et les cercles/droites (ils sont montrés lors des exercices 5 et 6 du TD 1).

Droite : Une droite D peut être caractérisée par

1. Une équation complexe de la forme $\beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0$ avec $\beta \in \mathbb{C}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.
2. Une équation cartésienne (réelle) de la forme $ux + vy + w = 0$ avec $u, v, w \in \mathbb{R}$.
3. Deux de ses points A et B, d'affixe respectives a et b.

Comment naviguer entre ces différentes caractérisations ?

1. Si D a pour équation complexe $\beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0$
   (a) une équation cartésienne de D est donnée pour $u = 2\mathrm{Re}(\beta), v = 2\mathrm{Im}(\beta)$ et $w = \gamma$.
   (b) Si β est imaginaire pur, alors $(0, \frac{-\gamma}{2\mathrm{Im}(\beta)}), (1, \frac{-\gamma}{2\mathrm{Im}(\beta)}) \in D$
   Si β est réel, alors $(\frac{-\gamma}{2\mathrm{Re}(\beta)}, 0), (\frac{-\gamma}{2\mathrm{Re}(\beta)}, 1) \in D$
   Si β n'est ni réel ni imaginaire pur, alors $(0, \frac{-\gamma}{2\mathrm{Im}(\beta)}), (\frac{-\gamma}{2\mathrm{Re}(\beta)}, 0) \in D$
2. Si D a pour équation cartésienne $ux + vy + w = 0$
   (a) Une équation complexe de D est donnée pour $\beta = \frac{u+iv}{2}$ et $\gamma = w$.
   (b) Si $u = 0$, alors $(0, \frac{-w}{v})$, $(1, \frac{-w}{v}) \in D$
   Si $v = 0$, alors $(\frac{-w}{u}, 0), (\frac{-w}{u}, 1) \in D$
   Si $uv \neq 0$, alors $(0, \frac{-w}{v}), (\frac{-w}{u}, 0) \in D$.
3. Si D passe par les points A et B
   (a) équation complexe de D est donnée pour $\beta = i(b-a)$ et $\gamma = 2\mathrm{Im}(a\overline{b})$.
   (b) Une équation cartésienne est donnée pour $u = -\mathrm{Im}(b-a)$, $v = \mathrm{Re}(b-a)$, $w = 2\mathrm{Im}(a\overline{b})$.

Cercles : Une équation de cercle dans $\mathbb{C}$ est de la forme $\alpha|z|^2 + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0$, cette équation est celle du cercle de centre $\frac{-\beta}{\alpha}$ et de rayon $\frac{\sqrt{|\beta|^2-\alpha\gamma}}{|\alpha|}$ (il faut vérifier que le rayon est positif, sans quoi l'équation n'a pas de solutions).

Réciproquement, le cercle $\mathcal{C}(x, r)$ a pour équation complexe $|z|^2 - \overline{x}z - x\overline{z} + |x|^2 - r^2 = 0$

Exercice 1.

1. Soient x, y, z des nombres complexes distincts, affixes respectives des points X, Y, Z. On sait que le module de $\frac{x-y}{z-y}$ est le quotient des distances $\frac{YX}{YZ}$, tandis que son module est l'angle orienté $\arg(\overrightarrow{YZ}, \overrightarrow{YX})$. Si f est une similitude géométrique directe, on a

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{f(z)-f(y)}\right| = \frac{k|x-y|}{k|z-y|} = \left|\frac{x-y}{z-y}\right|$$

et, comme f conserve les angles orientés : $\arg(\overrightarrow{YZ}, \overrightarrow{YX}) = \arg(\overrightarrow{f(Y)f(Z)}, \overrightarrow{f(Y)f(X)})$.
Réciproquement, si f respecte l'hypothèse, on considère l'application

$$\phi : (x, y) \mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

pour montrer que f est une similitude géométrique, on doit montrer que $|\phi(x, y)|$ est constant (ce nombre réel sera le rapport de la similitude f). On va carrément montrer que $\phi(x, y)$ est constant, on sait déjà que ϕ est symétrique : $\phi(x, y) = \phi(y, x)$, ensuite, on a par hypothèse

$$\frac{f(x)-f(y)}{f(z)-f(y)} = \frac{x-y}{z-y} \Rightarrow \phi(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(z)-f(y)}{z-y} = \phi(z, y)$$

Ainsi, $\phi(x, y)$ ne dépend pas de x, d'où

$$\phi(x, y) = \phi(0, y) = \phi(y, 0) = \phi(1, 0)$$

et ϕ est constante : f est une similitude géométrique.

2. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

$$|f(z) - f(z')| = |\alpha z + b - \alpha z' - b| = |\alpha(z - z')| = |\alpha||z - z'|$$

donc f est une similitude géométrique, pour prouver qu'elle est directe, on utilise la caractérisation de la question précédente.

$$\frac{f(x)-f(y)}{f(z)-f(y)} = \frac{\alpha(x-y)}{\alpha(z-y)} = \frac{x-y}{z-y}$$

donc f est bien une similitude géométrique directe.

3. On raisonne par analyse synthèse : supposons que $f(z) = \alpha z + \beta$, alors $\beta = f(0)$, et $\alpha = f(1) - b$.
Par la question précédente, l'application ϕ est constante égale à $\phi(1, 0) = \alpha$, on a alors (pour $z \neq 0$)

$$\alpha z + \beta = \phi(z, 0)z + f(0) = \frac{f(z) - f(0)}{z - 0}z + f(0) = f(z)$$

comme $\alpha 0 + \beta = f(0)$ par définition, on a bien

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \alpha z + \beta$$

et f est une similitude complexe directe.

Exercice 2.

1. On a $i = e^{i\pi/2}$, donc $r : z \mapsto iz = e^{i\pi/2}z$ est une rotation (de centre 0) et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, r^n est alors une rotation de centre 0 et d'angle $\frac{n\pi}{2}$, en particulier, r^{123} est une rotation d'angle

$$\frac{123\pi}{2} \equiv 60\pi + \frac{3\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi]$$

D'où $r^{123}(z) = e^{3\pi/2}z = -iz$.
Autre méthode : On sait que $i^4 = 1$, donc

$$r^{123}(z) = i^{123}z = i^{4\times30+3}z = i^3 z = -iz$$

2. On a

$$r \circ t(z) = r(t(z)) = it(z) = i(z+2) = iz + 2i$$
$$t \circ r(z) = t(r(z)) = r(z) + 2 = iz + 2$$

On remarque en particulier que $r \circ t \neq t \circ r$: la composition des applications n'est pas commutative !

3. Comme $r \circ t$ est une similitude, elle préserve l'alignement et multiplie les distances par une constante, donc $r \circ t(D)$ est une droite et $r \circ t(C)$ est un cercle.
On a plusieurs méthodes pour D :
Avec deux points : D passe par les points $(0,1), (-1,0)$, d'affixes respectives $i, -1$.
On a $r \circ t(-1) = -i + 2i = i$ et $r \circ t(i) = -1 + 2i$, on calcule

$$\beta := i(i - (-1+2i)) = i(i + 1 - 2i)i(1-i) = 1 + i \quad \text{et} \quad \gamma = 2\mathrm{Im}(i(-1-2i)) = 2\mathrm{Im}(-i+2) = -2$$

D'où l'équation complexe $(1+i)\overline{z} + (1-i)z - 2 = 0$.
Autre méthode : Méthode générale pour les équations : on a $t^{-1}(z) = z - 2$ et $r^{-1}(z) = i^{-1}z = -iz$, donc $(r \circ t)^{-1}(z) = t^{-1} \circ r^{-1}(z) = -iz - 2$. Si z respecte l'équation de D, alors $r \circ t(z)$ respecte l'équation

$$\begin{aligned}
0 &= (1+i)(r \circ t)^{-1}(z) + (1-i)\overline{(r \circ t)^{-1}(z)} + 2 \\
&= (1+i)(-iz-2) + (1-i)\overline{(-iz-2)} + 2 \\
&= -(1+i)(iz+2) + (1-i)(i\overline{z} - 2) + 2 \\
&= -(iz + 2 - z + 2i) + (i\overline{z} - 2 + \overline{z} + 2i) + 2 \\
&= -iz - 2 + z - 2i + i\overline{z} - 2 + \overline{z} + 2i + 2 \\
&= z(-i+1) + \overline{z}(i+1) - 2
\end{aligned}$$

Pour le cercle : Par son équation, il s'agit du cercle de centre 1 et de rayon 1 comme le rapport de la similitude $r \circ t$ est 1, C est envoyé sur un cercle de rayon 1, dont le centre est d'affixe $r \circ t(1) = i + 2i = 3i$.
Au niveau des équations, $r \circ t(z)$ respecte l'équation

$$\begin{aligned}
0 &= (r \circ t)^{-1}(z)\overline{(r \circ t)^{-1}(z)} - (r \circ t)^{-1}(z) - \overline{(r \circ t)^{-1}(z)} \\
&= (-iz-2)\overline{(-iz-2)} - (-iz-2) - \overline{(-iz-2)} \\
&= -(iz+2)(i\overline{z} - 2) + (iz+2) - (i\overline{z} - 2) \\
&= -(-z\overline{z} + 2i\overline{z} - 2iz - 4) + iz + 2 - i\overline{z} + 2 \\
&= z\overline{z} - 2i\overline{z} + 2iz + 4 + iz + 2 - i\overline{z} + 2 \\
&= |z|^2 + 3iz - 3i\overline{z} + 8
\end{aligned}$$

Qui est bien l'équation du cercle de centre $3i$ et de rayon $\sqrt{9-8} = 1$.

Exercice 3.
1. C'est surtout du calcul, on pose $z = a + ib$, on a

$$\begin{aligned}
f(z) = z &\Leftrightarrow -i\overline{z} + 1 + i = z \\
&\Leftrightarrow -i(a - ib) + 1 + i = a + ib \\
&\Leftrightarrow -ia - b + 1 + i = a + ib \\
&\Leftrightarrow 1 + i = a + ib + ia + b \\
&\Leftrightarrow 1 + i = a + b + i(a+b) \\
&\Leftrightarrow a + b = 1
\end{aligned}$$

Les points fixes de f sont donnés par l'ensemble $F_f = \{1 - b + ib \mid b \in \mathbb{R}\}$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
g(z) = z &\Leftrightarrow i\bar{z} - 1 + i = z \\
&\Leftrightarrow i(a - ib) - 1 + i = a + ib \\
&\Leftrightarrow ia + b - 1 + i = a + ib \\
&\Leftrightarrow -1 + i = a + ib - ia - b \\
&\Leftrightarrow -1 + i = a - b + i(b - a) \\
&\Leftrightarrow b = a + 1
\end{aligned}$$

Les points fixes de g sont donnés par $F_g = \{a + i(a+1) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Soit ensuite $z \in F_g \cap F_f$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$z = 1 - b + ib = a + i(a+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - b = a \\ b = a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

On a donc un unique point fixe $z = i$: $F_f \cap F_g = \{i\}$.

2. On commence par calculer

$$\begin{aligned}
\phi(z) := f \circ g(z) &= -i\overline{g(z)} + 1 + i \\
&= -i\overline{(i\bar{z} - 1 + i)} + 1 + i \\
&= -i(-iz - 1 - i) + 1 + i \\
&= -z + i - 1 + 1 + i \\
&= -z + 2i
\end{aligned}$$

Il s'agit d'une similitude, de rapport $\alpha = -1 \neq 1$, elle admet donc un unique point fixe $\Omega = \frac{2i}{1+1} = i$. On sait alors que ϕ s'écrit $\phi(z) = \alpha(z - c) + c = -(z - i) + i$: il s'agit d'une rotation, d'angle π et de centre i.

Exercice 4. Toutes les applications considérées sont des similitudes directes.

1. On rappelle que $\frac{1}{i} = -i$, donc $f_1(z) = -iz$. Comme $-i \neq 1$, f_1 est une similitude à centre, de centre 0, il s'agit d'une rotation, de centre 0, et d'angle $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$

2. La similitude f_2 est clairement une translation de vecteur $\binom{2}{1}$, qui n'admet pas de points fixes.

3. La similitude f_3 a pour rapport $1 + i\sqrt{3} \neq 1$, elle admet donc un unique point fixe $\frac{\sqrt{3}(i-1)}{i\sqrt{3}} = i + 1$. Ensuite, le rapport de f_3 est $1 + i\sqrt{3} = 2(-j^2)$, donc f_3 est la composée d'une homothétie de centre $i + 1$ et de rapport 2, et d'une rotation de centre $i + 1$ et d'angle $\arg(-j^2) = \pi/3$.

4. La similitude f_4 a un rapport différent de 1, elle admet donc un unique point fixe $\frac{-i\tan(\alpha)}{-i\tan(\alpha)} = 1$. Il s'agit de la composée d'une homothétie, de centre 1 et de rapport $\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos(\alpha)}$, et d'une rotation de centre 1 d'angle $\arg(1 + \tan(\alpha)) = \alpha$

Exercice 5.

1. L'application f est une similitude directe par construction, avec $\alpha = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}$ et $\beta = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/6}$. Comme $\alpha \neq 1$, f est une similitude à centre, son unique point fixe a pour affixe

$$\omega = \frac{\beta}{1 - \alpha} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \frac{4}{1 - i\sqrt{3}} = 2$$

Son rapport est $\left|\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, son angle est $\arg\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

2. On sait que

$$\frac{\omega - f(z)}{\omega - z} = \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} = \alpha$$

donc $\omega - f(z) = \alpha(\omega - z)$, on a alors

$$\frac{z - f(z)}{\omega - f(z)} = \frac{(1-\alpha)z - \beta}{\alpha(\omega - z)} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{z-\omega}{\omega - z} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

Or, on a $\alpha - 1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}e^{2i\pi/3}$, donc $\frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\pi/2} = \frac{i}{\sqrt{3}}$, donc l'angle $\widehat{Mf(M)\Omega}$ est droit, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 6.
1. Premièrement, il est clair que l'identité (qui est une similitude !) fixe z_0. Ensuite, si ϕ et ψ sont des similitudes qui fixent z_0, alors

$$\phi \circ \psi(z_0) = \phi(\psi(z_0)) = \phi(z_0) = z_0$$

donc $\phi \circ \psi$ fixe z_0. Enfin, on a

$$\phi(z_0) = z_0 \Rightarrow z_0 = \phi^{-1}(z_0)$$

donc ϕ^{-1} fixe également z_0 : L'ensemble $\mathrm{Sim}^+_{z_0}$ est donc non vide, stable par composition et passage à l'inverse : c'est un sous-groupe de Sim^+.

2. Soit $\phi : z \mapsto \alpha z + \beta$ une similitude directe, si $\alpha \neq 1$, son seul point fixe est $\frac{\beta}{1-\alpha}$, donc $\phi \in \mathrm{Sim}^+_{z_0}$ si et seulement si $\beta = (1-\alpha)z_0$, d'où

$$\mathrm{Sim}^+_{z_0} = \{\phi : z \mapsto \alpha z + z_0(1-\alpha) = \alpha(z - z_0) + z_0 \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$$

Ensuite, soient $\phi, \phi' \in \mathrm{Sim}^+_{z_0}$, on a $\phi(z) = \alpha(z - z_0) + z_0$ et $\phi'(z) = \alpha'(z - z_0) + z_0$, donc

$$\phi \circ \phi'(z) = \alpha(\phi'(z) - z_0) + z_0 = \alpha\alpha'(z - z_0) + z_0 = \phi' \circ \phi(z)$$

donc $\phi \circ \phi' = \phi' \circ \phi$ et $\mathrm{Sim}^+_{z_0}$ est abélien. (On peut en fait montrer que $\mathrm{Sim}^+_{z_0}$ est isomorphe à $(\mathbb{C}^*, \times)$).

3. Soit $\phi \in \mathrm{Sim}^+_0$, on a vu dans la question précédente que $\phi(z) = \alpha(z - 0) + 0 = \alpha z$ pour un $\alpha \in \mathbb{C}$. On pose $t_{z_0} : z \mapsto z + z_0$ la translation par z_0, on a

$$t_{z_0} \circ \phi \circ (t_{z_0})^{-1}(z) = t_{z_0}(\phi(z - z_0)) = t_{z_0}(\alpha(z - z_0)) = \alpha(z - z_0) + z_0$$

Cette similitude envoie 0 sur $z_0(1-\alpha)$. Si $\alpha \neq 0$, ceci n'est pas égal à 0, et $t_{z_0} \circ \phi \circ (t_{z_0})^{-1}$ ne fixe pas 0 : Le sous-groupe Sim^+_0 n'est donc pas distingué.

4. Soit $\phi : z \mapsto \alpha z + \beta$, on a

$$\phi(z) = z \Rightarrow (\alpha - 1)z = -\beta$$

Si $\alpha = 1$ (i.e ϕ est une translation), l'équation devient $\beta = 0$, donc ϕ admet des points fixes si et seulement si $\beta = 0$ (auquel cas ϕ est l'identité).
Si $\alpha \neq 1$, alors $\frac{\beta}{1-\alpha}$ est l'unique point fixe de ϕ.
Ainsi, si ϕ est une similitude qui fixe deux points distincts, alors $\phi = Id$.

5. Soit $\phi : z \mapsto \alpha z + \beta$ une similitude directe. Soient A, B deux points de D, l'image de D par ϕ est la droite passant par $\phi(A)$ et $\phi(B)$, on a donc $D = \phi(D)$ si et seulement si $\phi(A), \phi(B) \in D$.
En l'occurrence, la droite D passe par 0 et i, avec

$$\phi(0) = \beta \quad \text{et} \quad \phi(i) = \alpha i + \beta$$

On doit donc avoir $\beta \in D = i\mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$, d'où

$$\mathrm{Stab}(D) = \{\phi : z \mapsto xz + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

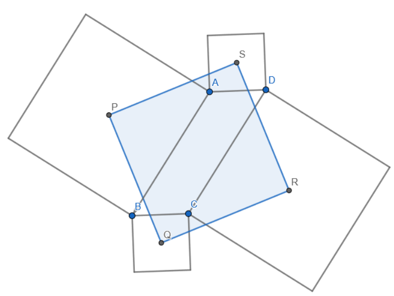
Montrons à présent que $\mathrm{Stab}(D)$ est un sous-groupe de Sim^+. Premièrement, il est clair que l'identité stabilise D, ensuite, si ϕ et ψ sont des similitudes qui stabilisent D, alors

$$\phi \circ \psi(D) = \phi(\psi(D)) = \phi(D) = D$$

donc $\phi \circ \psi$ stabilise D. Enfin, on a
$$\phi(D) = D \Rightarrow D = \phi^{-1}(D)$$
donc ϕ^{-1} stabilise également D : L'ensemble $\mathrm{Stab}(D)$ est donc non vide, stable par composition et passage à l'inverse : c'est un sous-groupe de Sim^+.

Exercice 7. On peut premièrement remarquer que z, z^2 et z^4 sont évidemment alignés si $z = z^2, z = z^4$ ou $z^2 = z^4$ (car il n'y a dans ce cas là que deux points distincts, non trois). On suppose donc que z, z^2, z^4 sont distincts deux à deux, auquel cas ils sont alignés si et seulement si
$$\frac{z^4 - z}{z^2 - z} = \frac{z^3 - 1}{z - 1} = \frac{(z-1)(z-j)(z-j^2)}{z-1} = (z-j)(z-j^2) = z^2 - jz - j^2 z + 1 = z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$$
en posant $z = a + ib$, on a
$$z^2 + z = (a^2 - b^2 + 2iab) + a + ib = a + a^2 - b^2 + i(2ab + b) = a + a^2 - b^2 + ib(2a+1)$$
Donc z^2+z+1 est réel (si et seulement si z^2+z est réel) si et seulement si $b(2a+1) = 0$, l'ensemble des solutions est donc
$$\left\{ z = a + ib \in \mathbb{C} \;\middle|\; b = 0 \text{ ou } a = \frac{-1}{2} \right\} = \left\{ \frac{-1}{2} + ib \mid b \in \mathbb{R} \right\} \cup \mathbb{R}$$
(on pouvait deviner que $z \in \mathbb{R}$ serait toujours une solution : dans ce cas, z, z^2, z^4 sont tous trois des réels, donc 'alignés' vu comme points du plan).

Exercice 8.



1. Rappelons nous ce qu'est un carré : notons $AA'B'B$ le carré s'appuyant sur $[AB]$, cela entraîne en particulier que $AA' = AB$ et $\arg(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}) = -\pi/2$, autrement dit $\frac{a'-a}{b-a} = -i$ et $a' = a + i(a-b)$, on obtient de même $b' = i(a-b) + b$, le centre de gravité de $AA'B'B$ est alors donné par
$$p = \frac{1}{4}(a + a' + b' + b) = \frac{1}{4}(2(a+b) + 2i(a-b)) = \frac{a + b + i(a-b)}{2}$$
D'un autre côté, on sait que $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{|1-i|^2} = \frac{1+i}{2}$, donc
$$\frac{a - ib}{1-i} = \frac{(1+i)(a-ib)}{2} = \frac{a - ib + ia + b}{2} = \frac{a + b + i(a-b)}{2}$$
on a donc bien $p = \frac{a-ib}{1-i}$. Le même raisonnement appliqué en remplaçant respectivement A, B par B, C, C, D et D, A donne
$$p = \frac{a - ib}{1-i}, \quad q = \frac{b - ic}{1-i}, \quad r = \frac{c - id}{1-i}, \quad s = \frac{d - ia}{1-i}$$

2. Pour montrer que $PQRS$ est un carré, on va premièrement montrer que c'est un parallélogramme, on a

$$q - p = \frac{b - a - i(c - b)}{1 - i} \quad \text{et} \quad r - s = \frac{c - d - i(d - a)}{1 - i}$$

comme par hypothèse, $ABCD$ est un parallélogramme, on a $b - a = c - d$ et $c - b = d - a$, donc $q - p = r - s$ et $PQRS$ est un parallélogramme.
Ensuite, il suffit pour conclure de montrer que $PQ = PS$ ($\Rightarrow PQRS$ est un losange), et $\widehat{QPS} = \frac{\pi}{2}$ ($\Rightarrow PQRS$ est un losange à angle droit : un carré), on a

$$\frac{q - p}{s - p} = \frac{b - a - i(c - b)}{d - a - i(a - b)} = \frac{b - a - i(c - b)}{c - b - i(a - b)} = -i$$

soit le résultat voulu.

3. Le nombre complexe $\frac{s-q}{r-p}$ vaut $\pm i$ si et seulement si QS et PR sont de même longueur et se coupent orthogonalement, on a

$$\frac{s - q}{r - p} = \frac{d - b - i(a - c)}{c - a - i(d - b)} = -i$$

d'où le résultat voulu.

Exercice 9.
1. On pose $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$, de sorte que

$$s(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} z = \alpha z$$

En particulier, $A_n = s^n(A_0)$ a pour affixe $a_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}} 6$, l'argument de a_n est donc $\frac{n\pi}{6}[2\pi]$, en particulier si $n = 12$, cet argument est 0 : A_{12} est sur l'axe des réels.
2. L'angle $\widehat{A_n A_{n+1} O}$ est donné par l'argument de $\frac{a_n - a_{n+1}}{0 - a_{n+1}}$, on a

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{0 - a_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{(\alpha^{n+1} - \alpha^n)6}{\alpha^n 6} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

On calcule donc $\alpha - 1 = \frac{-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{\frac{2i\pi}{3}}$, l'argument de $\frac{\alpha - 1}{\alpha}$ est alors $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, ce qui est bien le résultat recherché : le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
3. On a

$$A_nA_{n+1} = |a_{n+1} - a_n| = |6\alpha^n(\alpha - 1)| = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |\alpha - 1| = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \cdots A_{11}A_{12}$ est alors donnée par

$$\ell = \sum_{k=0}^{11} 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k = 3\frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3(2^{12} - 3^6)}{2^{11}(2 - \sqrt{3})}$$

Exercice 10. On sait que les translations par des vecteurs à coordonnées entières préservent les points à coordonnées entières, autrement dit, on peut (en translatant par z_A) supposer que A a pour affixe $a = 0$.
Ensuite, on a par hypothèse $z_B = b_1 + ib_2$ avec $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$. Ensuite, quitte à supposer que $ABCD$ est direct, le point D est image de B par la rotation de centre $A = 0$ et d'angle $\pi/2$, autrement dit

$$z_D = iz_B = i(b_1 + ib_2) = -b_2 + ib_1$$

est également à coordonnées entières. Enfin, comme $ABCD$ est en particulier un parallélogramme, on a $z_B - z_A = z_C - z_D$, donc $z_C = z_B + z_D$ est aussi à coordonnées entières, d'où le résultat.
Le cas du carré reposait essentiellement sur le fait que la multiplication par $i = e^{i\pi/2}$ préserve le fait que les coordonnées sont entières, dans le cas d'un triangle, on effectue une rotation d'angle $\pi/3$, or la multiplication par $e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ne préserve pas le fait que les coordonnées soient entières :

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(a+ib) = \frac{a-\sqrt{3}b}{2} + i\frac{b+a\sqrt{3}}{2}$$

Si a et b sont des entiers non tous nuls, alors

- Si $b \neq 0$, alors $x = \frac{a-\sqrt{3}b}{2}$ n'est pas entier, en effet, on a

$$2x = a - \sqrt{3}b \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a-2x}{b}$$

donc $\sqrt{3}$ serait un rationnel si $x \in \mathbb{Z}$, ce qui est faux.

- Si $a \neq 0$, alors $y = \frac{b+a\sqrt{3}}{2}$ n'est pas un entier, en effet, on a

$$2y = b + a\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{2y-b}{a}$$

donc $\sqrt{3}$ serait un rationnel si $y \in \mathbb{Z}$, ce qui est faux.

Exercice 11. Notons $a = e^{i\alpha}$, on a $z_r = e^{i\theta_r}$ avec

$$\begin{aligned} n\theta_r \equiv \alpha[2\pi] &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid n\theta_r \alpha + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \ \mid \theta_r = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n} \\ &\Leftrightarrow \theta_r \in \left\{\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\} \end{aligned}$$

Quitte à réordonner les z_r, on peut supposer que $\theta_r = \frac{\alpha}{n} + (r-1)\frac{2\pi}{n}$. De façon générale, on a,

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right) = 2e^{i\theta/2}\cos(\theta/2)$$

Et donc

$$\frac{1+z_r}{1+z_1} = \frac{2e^{i\theta_r/2}\cos(\theta_r/2)}{2e^{i\theta_1/2}\cos(\theta_1/2)} = e^{i/(\theta_r-\theta_1)/2}\frac{\cos(\theta_r/2)}{\cos(\theta_1/2)}$$

Par ailleurs, on a $(\theta_r - \theta_1)/2 = (r-1)\frac{\pi}{n}$, d'où

$$\left(\frac{1+z_r}{1+z_1}\right)^n = e^{(r-1)\pi}\left(\frac{\cos(\theta_r/2)}{\cos(\theta_1/2)}\right)^n = (-1)^{r-1}\left(\frac{\cos(\theta_r/2)}{\cos(\theta_1/2)}\right)^n \in \mathbb{R}$$

Enfin, on a, pour r, r' différents de 1 :

$$\frac{(1+z_r)^n - (1+z_1)^n}{(1+z_{r'})^n - (1+z_1)^n} = \frac{\left(\frac{1+z_r}{1+z_1}\right)^n - 1}{\left(\frac{1+z_{r'}}{1+z_1}\right)^n - 1} \in \mathbb{R}$$

Donc les points $z_1, z_r, z_{r'}$ sont alignés, ceci étant vrai quels que soient r, r', on a bien le résultat voulu.