Correction TD 1

Exercice 1. On rappelle (comme en cours) les critères de D'Alembert et de Cauchy : soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence R.
Critère de d'Alembert : Si $a_n \neq 0$, au moins à partir d'un certain rang (autrement dit, $a_n = 0$ ne se produit qu'un nombre fini de fois [1]), on considère la suite

$$u_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

dont on calcule la limite ℓ (si cette limite existe), on a alors $R = 1/\ell$.
Critère de Cauchy : On considère la suite

$$v_n := \sqrt[n]{|a_n|}$$

dont on calcule la limite ℓ (si cette limite existe), on a alors $R = 1/\ell$.
1. On utilise le critère de d'Alembert, on a $a_n = \frac{n^n}{n!}$, qui n'est jamais nul, on peut donc calculer

$$\begin{aligned} u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} \\ &= \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Il reste donc à calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a

$$u_n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

On calcule un développement limité du logarithme au voisinage de 1
Rappel : développement limité d'une fonction f 'suffisamment dérivable au voisinage de a', on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

ou la notation $o(x-a)$ désigne une expression de la forme $\varepsilon(x) * (x-a)^n$ où ε tend vers 0 quand x tend vers a.
Ici, un DL d'ordre 1 suffit, on doit juste calculer la dérivée de ln, à savoir $x \mapsto 1/x$, notre DL est donc donné par

$$\ln(x) = \ln(1) + \frac{1}{1}(x-1) + o(x-1) = x - 1 + o(x-1)$$

On applique en l'occurrence ce DL pour $x = 1 + 1/n$, on obtient donc

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad u_n = \exp\left(n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(1 + o(1))$$

1. la plupart du temps on a carrément $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$

qui admet $e^1 = e$ pour limite, d'où $R = 1/e$.
2. Ici, on applique le critère de Cauchy, on a $a_n = n^n$, et $v_n = \sqrt[n]{n^n} = n$ qui admet clairement $+\infty$ pour limite, d'où $R = 0$.
3. Retour au critère de D'Alembert, là encore la suite a_n n'est jamais nulle, on calcule donc

$$\begin{aligned} u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} \\ &= \frac{4+6/n+2/n^2}{1+2/n+1/n^2} \end{aligned}$$

qui tend vers 4, d'où $R = 1/4$.
4. On termine sur un critère de Cauchy :

$$v_n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2/n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

dont on a déjà vu que la limite est e, d'où là encore $R = 1/e$.

Exercice 2. Cet exercice illustre l'imprévisibilité du comportement d'une série entière au bord de son disque de convergence. Notons S_k la série entière étudiée (qui dépend de k), on peut appliquer les deux critères, écrivons la preuve pour le critère de d'Alembert :

$$u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^k}{(n+1)^k} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k$$

Il est facile de prendre la limite de cette suite en n (parce que k ne dépend pas de n, il n'intervient pas dans le calcul de la limite !). On obtient $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1^k = 1$, donc $R_k = 1$ ne dépend en fait pas de k.

- $S_0 = \sum z^n$, si $|z^n|$, le terme général de cette suite est de module constant égal à 1 : il est impossible que la série converge, quel que soit la valeur de z telle que $|z| = 1$.
- $S_1 = \sum z^n/n$. Il est connu que cette série diverge pour $z = 1$, et converge pour $z = -1$.
- $S_2 = \sum z^n/n^2$. Pour $|z| = 1$, on a $|z^n/n^2| \leqslant 1/n^2$, qui est le terme général d'une série convergente, la série est donc toujours convergente sur le bord de son disque de convergence.

Exercice 3. 1. Comme on l'a dit, pour montrer une équivalence, on va montrer le sens direct, puis le sens réciproque.
Commençons par noter que le rayon de convergence est non nul si et seulement si il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\sum u_n \alpha^n$ converge, c'est plutôt cette seconde propriété que l'on va montrer équivalente à

$$\exists q > 0 \mid \forall n \geqslant 1, |u_n| \leqslant q^n$$

($\Rightarrow$) Supposons donc qu'il existe $\alpha > 0$ tel que la série $\sum u_n \alpha^n$ converge, on sait en particulier que le terme général $u_n \alpha^n$ tend vers 0, ce qui par définition veut dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N, |u_n \alpha^n| < \varepsilon$$

on applique cette définition pour $\epsilon = 1$, et on obtient l'existence d'un N tel que $n \geqslant N \Rightarrow |u_n| < \frac{1}{\alpha^n}$. Par ailleurs, quitte à prendre β assez grand, on peut toujours supposer que $|u_n| < \beta$ pour $1 \leqslant n \leqslant N$ (car il n'y a qu'un nombre fini de tels termes), en posant $q = \max(\beta, 1/\alpha)$, on obtient bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leqslant q^n$$

($\Leftarrow$) réciproquement, soit $q > 0$ tel que $\forall n \geqslant 1, |u_n| \leqslant q^n$, on a alors $|u_n z^n| \leqslant |qz|^n$, qui est le terme général d'une série convergente dés que $|z| < 1/q$, donc la série $\sum u_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant 1/q$.
2. Supposons que $\sum b_n z^n$ soit une série entière telle que, dans un voisinage de 0 on ait $(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n) = 1$. Or, en supposant que $\sum b_n z^n$ est de rayon de convergence non nul, le produit de Cauchy des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est donné (sur le plus petit des deux disques de convergence) par $\sum c_n z^n$ avec

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Ceci entraîne les relations suivantes (rappelons que $a_0 = 1$ par hypothèse)

$$b_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \geq 1,\ b_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$$

Réciproquement, on peut utiliser ces relations pour définir la suite $(b_n)_n$ par récurrence. Par exemple, on a $b_0 = 1$, puis $b_1 = -a_1$, $b_2 = -a_2 - a_1 b_1$ etc. La série entière ainsi définie est bien l'inverse de $\sum a_n z^n$ au voisinage de 0, à condition que $\sum b_n z^n$ ait un rayon de convergence non nul. Pour le montrer, on utilise la première question. Puisque $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul par hypothèse, d'après la première question, il existe $q > 0$ tel que $|a_n| \leq q^n$ pour tout $n \geq 1$. Pour conclure, il suffit donc de montrer par récurrence (forte) que

$$\forall n \geq 1,\ |b_n| \leq (2q)^n$$

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 1$, on a $|b_1| = |-a_1| \leq q \leq 2q$.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \geq 1$ et supposons le résultat vrai pour tout $1 \leq k \leq n$. On calcule

$$|b_{n+1}| = \left| -\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_{n+1-k} \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k||b_{n+1-k}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} q^k (2q)^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} q^{n+1} 2^{n+1-k}$$

$$= q^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n+1-k} = q^{n+1} \sum_{k'=0}^{n} 2^{k'} = q^{n+1} \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = q^{n+1}(2^{n+1}-1) = (2q)^{n+1} - \underbrace{q^{n+1}}_{\geq 0} \leq (2q)^{n+1},$$

ce qui est bien le résultat au rang $n+1$.
Ainsi, la série $\sum b_n z^n$ est de rayon de convergence non nul et donc l'inverse de la somme de la série $\sum a_n z^n$ est bien développable en série entière au voisinage de 0, comme souhaité.
3. On utilise la question précédente : si $S = \sum a_n z^n$ est une série entière ne s'annulant pas en 0, alors S/a_0 est aussi une série entière, dont la valeur en 0 est 1, on se retrouve donc dans la situation de la question précédente. L'inverse de S/a_0 est donc développable en série entière au voisinage de 0, comme on a

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{a_0} \frac{a_0}{S} = \frac{1}{a_0} \left(\frac{S}{a_0} \right)^{-1}$$

on en déduit que $1/S$ est développable en série entière autour de 0 (c'est le produit d'une série entière par un scalaire, en l'occurrence $1/a_0$).

Exercice 4. J'ai été assez brouillon sur mes résultats concernant la régularité des séries entières (comme quoi, les rappels sont bon pour tout le monde !). Étant donné une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R, la somme S de cette série est une fonction dérivable (en fait de classe C^∞, même holomorphe comme vous le verrez peut-être en analyse complexe) sur son disque de convergence <u>ouvert</u>, avec $S'(z) = \sum (n+1) a_{n+1} z^n$.
1. Par définition, l'exponentielle est une série entière, dont il faut calculer le rayon de convergence, ce pour quoi on utilise le critère de d'Alembert, on calcule

$$u_n = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

qui admet pour limite 0, l'exponentielle a donc un rayon de convergence infini, il s'agit donc d'une fonction continue (en fait lisse) définie sur $\mathbb{C}$.
2. C'est le même calcul que j'ai exposé en TD :

$$\begin{aligned}
\exp(z)\exp(z') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z'^m}{m!} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{p-k}}{(p-k)!} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!(p-k)!} z^k z'^{p-k} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{k!(p-k)!} z^k z'^{p-k} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} z^k z'^{p-k} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (z+z')^p \\
&= \exp(z+z')
\end{aligned}$$

3. On peut utiliser les théorèmes de séries entières, qui nous disent directement que $\exp'$ est une série entière, également de rayon de convergence infini, donnée par

$$\exp'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{1}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

donc $\exp' = \exp$. On peut néanmoins également utiliser l'argument 'direct' que j'ai donné, par calcul de taux d'accroissement, on a par définition

$$\exp'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h}$$

avec

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}$$

qui est une fonction continue, valant $\exp(x)$ en 0, donc

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

soit le résultat attendu.

Exercice 5. On utilise que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté par le nombre complexe $b-a$ ('la fin moins le début').
1.(a) Géométriquement, le point M est sur la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires. On a donc la suite de propriétés équivalentes suivantes

- $M \in (AB)$.
- $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires.
- Il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{BM}$.
- Il existe un réel λ tel que $z - a = \lambda(z - b)$.
- $\frac{z-a}{z-b} = \lambda \in \mathbb{R}$ (cette dernière propriété est équivalente car on suppose $z \neq b$, pour pouvoir diviser).

Or, on a
$$\frac{z-a}{z-b} = \frac{(z-a)(\overline{z}-\overline{b})}{(z-b)\overline{(z-b)}} = \frac{(z-a)(\overline{z}-\overline{b})}{|z-b|^2}$$
donc $\frac{z-a}{z-b}$ est réel si et seulement si $(z-a)(\overline{z}-\overline{b})$ est réel.
(b) Compte tenu de la première question, on va en fait construire β et γ (et pas seulement montrer l'existence, oui c'est différent). On rappelle qu'un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, or on sait que
$$\mathrm{Im}(x) = \frac{x-\overline{x}}{2i} = \frac{-i}{2}(x-\overline{x})$$
Donc le nombre x est réel si et seulement si $i(x-\overline{x}) = 0$. On va appliquer ce critère à l'expression $(z-a)(\overline{z}-\overline{b})$: on a
$$(z-a)(\overline{z}-\overline{b}) = z\overline{z} - a\overline{z} - z\overline{b} + a\overline{b} = -a\overline{z} - \overline{b}z + a\overline{b} + |z|^2$$
et donc $(z-a)(\overline{z}-\overline{b})$ est réel si et seulement si
$$\begin{aligned} 0 = i(-a\overline{z} - \overline{b}z + a\overline{b} + |z|^2 - \overline{(-a\overline{z} - \overline{b}z + a\overline{b} + |z|^2)}) &= i(-a\overline{z} - \overline{b}z + a\overline{b} + |z|^2 + \overline{a}z + b\overline{z} - \overline{a}b - |z|^2) \\ &= i(z(\overline{a}-\overline{b}) + \overline{z}(b-a) + a\overline{b} - \overline{a}b) \\ &= z\overline{i(b-a)} + \overline{z}i(b-a) + 2\mathrm{Im}(a\overline{b}) \end{aligned}$$
En posant $\beta = i(b-a)$ et $\gamma = 2\mathrm{Im}(a\overline{b})$, on obtient bien le résultat voulu.
2. Une équation caractéristique de D est de la forme $ax+by+c=0$, où les paramètres a, b, c sont des nombres réels (a et b ne sont plus les affixes des points A et B de la question précédente). Soit $M = (x, y)$ un point de P, d'affixe $z = x+iy$, on sait que
$$x = \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad y = \mathrm{Im}(z) = \frac{-i(z-\overline{z})}{2}$$
On a donc que M est dans D si et seulement si
$$0 = a\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right) + b\left(\frac{-i(z-\overline{z})}{2}\right) + c = \left(\frac{a-ib}{2}\right)z + \left(\frac{a+ib}{2}\right)z + c$$
On retrouve la caractérisation précédente pour $\beta = \frac{a+ib}{2}$ et $\gamma = c$.

Exercice 6.
1.(a) Si $\alpha = \beta = 0$, l'équation étudiée devient $\gamma = 0$, c'est une équation qui ne dépend pas de z, et l'ensemble des solutions est donnée par
$$\mathbb{C} \text{ si } \gamma = 0 \quad \text{et} \quad \varnothing \text{ si } \gamma \neq 0$$
(b) Si $\alpha = 0$, l'équation étudiée devient $\beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0$, l'ensemble des solutions est alors donné par une droite, dont l'équation cartésienne est (d'après l'exercice précédent) $2\mathrm{Re}(\beta)x + 2\mathrm{Im}(\beta)y + c = 0$.
C'est le cas le plus compliqué, premièrement, considérons le cas $\alpha = 1$, on obtient
$$\begin{aligned} 0 = |z|^2 + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma &= (\beta+z)(\overline{\beta}+\overline{z}) + \gamma' - |\beta| \\ &\Leftrightarrow |\beta|^2 - \gamma = |\beta+z|^2 \end{aligned}$$

- Si $\gamma > |\beta|^2$, cette équation n'a pas de solutions.
- Si $\gamma \leqslant |\beta|^2$, les solutions prennent la forme d'un cercle, de centre $-\beta$, et de rayon $\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$.

À présent, si $\alpha \neq 0$ est réel, on a en divisant par α
$$0 = \alpha|z|^2 + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma \Leftrightarrow 0 = |z|^2 + \beta'\overline{z} + \overline{\beta'}z + \gamma'$$
avec $\beta' = \beta/\alpha$ et $\gamma' = \gamma/\alpha$. Le cas $\alpha = 1$ nous apprend alors que

- Si $\gamma' > |\beta'|^2$, i.e $\alpha\gamma > |\beta|^2$, alors cette équation n'a pas de solutions
- Si $\alpha\gamma \leqslant |\beta|^2$, alors les solutions prennent la forme d'un cercle, de centre $-\beta' = -\beta/\alpha$ et de rayon $\frac{\sqrt{|\beta|^2-\alpha\gamma}}{|\alpha|}$

2. On peut déjà commencer par évacuer le point $\lambda = 1$, qui donne

$$E_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = |z-b|\}$$

l'ensemble étudié est la droite médiatrice des points d'affixe a et b.
De façon générale, on a

$$\begin{aligned} |z-a| = \lambda|z-b| &\Leftrightarrow (z-a)\overline{(z-a)} = \lambda^2\overline{(z-b)}(z-b) \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - a\overline{z} - \overline{a}z + |a|^2 = \lambda^2(|z|^2 - b\overline{z} - \overline{b}z + |b|^2) \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)^2|z|^2 + (\lambda^2 b - a)\overline{z} + \overline{(\lambda^2 b - a)}z + |a|^2 - \lambda^2|b|^2 = 0 \end{aligned}$$

Une équation qui a un sens différent selon les valeurs de λ !

- Si $(1-\lambda^2) = 0$ et $\lambda^2 b - a = 0$, autrement dit $\lambda = 1$ et $b = a$, l'équation devient $0 = 0$ (c'est logique ! dans ce cas on a $E_\lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = |z-a|\}$, c'est tout le plan complexe !
- Si $(1-\lambda^2) = 0$ (i.e $\lambda = 1$) et $a \neq b$, on obtient l'équation $(b-a)\overline{z} + \overline{(b-a)}z + |a|^2 - |b|^2 = 0$, c'est l'équation de la médiatrice de a et b.
- Si $\lambda \neq 1$ et $a \neq b$, on retrouve l'équation d'un cercle avec $\alpha = (1-\lambda^2), \beta = (\lambda^2 b - a), \gamma = |a|^2 - \lambda^2|b|^2$. On calcule

$$\begin{aligned} |\beta|^2 - \alpha\gamma &= (\lambda^2 b - a)(\lambda^2\overline{b} - \overline{a}) - (1-\lambda^2)(|a|^2 - \lambda^2|b|^2) \\ &= (\lambda^4|b|^2 - \lambda^2 a\overline{b} - \lambda^2 b\overline{a} + |a|^2) - (|a|^2 - \lambda^2|b|^2 - \lambda^2|a|^2 + \lambda^4|b|^2) \\ &= \lambda^2(|b|^2 + |a|^2 - a\overline{b} - b\overline{a}) \\ &= \lambda^2|a-b|^2 \end{aligned}$$

Qui est toujours positif, on obtient donc bien un cercle, de centre $-\frac{\lambda^2 b - a}{1-\lambda^2}$ et de rayon $\frac{\lambda|a-b|}{|1-\lambda^2|}$

Exercice 7. On rappelle que $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$ est un nombre complexe tel que $j^3 = 1$, $j^2 + j + 1 = 0$, et on a $e^{i\pi/3} = -j^2 = j + 1$.
On sait par ailleurs que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si il est isocèle en A, et $\widehat{BAC} = \pm\pi/3$.
$(i) \Leftrightarrow (ii)$ Le scalaire complexe $\frac{c-a}{b-a}$ est le nombre λ tel que $(c-a) = \lambda(b-a)$, il est de module 1 si et seulement si $|c-a| = |b-a|$, et son argument est l'angle $\widehat{BAC}$, ce qui donne le résultat.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Si $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3} = -j^2$, on a

$$\begin{aligned} c - a = -j^2(b-a) &\Leftrightarrow a - c = (b-a)j^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = bj^2 + a(-j^2 - 1) + c \\ &\Leftrightarrow 0 = bj^2 + aj + c \\ &\Leftrightarrow 0 = b + aj^2 + cj \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c - a = -j(b-a) &\Leftrightarrow a - c = (b-a)j \\ &\Leftrightarrow 0 = bj + a(-j-1) + c \\ &\Leftrightarrow 0 = bj + aj^2 + c \end{aligned}$$

Soit le résultat voulu. Notons que on peut intervertir a, b, c dans ces calculs (autrement dit, sur un triangle équilatéral, il n'y a pas de 'sommet privilégié').

Exercice 8. On rappelle une formule pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs via leurs affixes complexes : soient $M = (x, y), M' = (x', y')$ deux points d'affixes respectives $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

$$\left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'} \right\rangle = xx' + yy' = \mathrm{Re}(xx' + yy' - i(xy' + x'y)) = \mathrm{Re}(z\overline{z'})$$

Ici, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}$ sont respectivement $z - a, z - b$, on a donc

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \right\rangle &= \mathrm{Re}((z-a)\overline{(z-b)}) \\
&= \mathrm{Re}(z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{b}z + a\overline{b}) \\
&= \mathrm{Re}(|z|^2 - a\overline{z} - \overline{b}z + a\overline{b}) \\
&= |z|^2 - \frac{a\overline{z} + \overline{a}z}{2} - \frac{\overline{b}z + b\overline{z}}{2} + \mathrm{Re}(a\overline{b}) \\
&= |z|^2 - z\overline{\left(\frac{a+b}{2}\right)} - \overline{z}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \mathrm{Re}(a\overline{b})
\end{aligned}$$

En posant $\beta = -\frac{a+b}{2}, \gamma = \mathrm{Re}(a\overline{b}) - \lambda, \alpha = 1$, l'équation $\left\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \right\rangle = \lambda$ est de la forme donnée dans l'exercice 6, où l'on a vu que l'ensemble des solutions est un cercle dépendant de $-\beta$ et de $\sqrt{|\beta|^2 - \gamma}$. On calcule alors

$$\begin{aligned}
|\beta|^2 - \gamma &= \frac{|a+b|^2}{4} - \mathrm{Re}(a\overline{b}) + \lambda \\
&= \frac{|a|^2 + |b|^2 + 2\mathrm{Re}(a\overline{b})}{4} - \mathrm{Re}(a\overline{b}) + \lambda \\
&= \frac{|a|^2 + |b|^2 - 2\mathrm{Re}(a\overline{b})}{4} + \lambda \\
&= \frac{|a-b|^2}{4} + \lambda
\end{aligned}$$

Si $\lambda < -\frac{|a-b|^2}{4}$, l'équation n'a pas de solutions.
So $\lambda \geqslant -\frac{|a-b|^2}{4}$, l'ensemble des solutions est le cercle de centre $-\beta = \frac{a+b}{2}$ et de rayon $\sqrt{\frac{|a-b|^2}{4} + \lambda}$.

Exercice 9. On utilise la caractérisation (iii) de l'exercice 7, avec $a = 1 + i$ et $b = -1 + 2i$, en notant c l'affixe de M, on a

$$\begin{aligned}
aj^2 + bj + c &= (1+i)j^2 + (-1+2i)j + c \\
&= j^2 + ij^2 - j + 2ij + c \\
&= j(j-1) + i(j^2 + 2j) + c \\
&= j(j-1) + i(j-1) + c \\
&= (j+i)(j-1) + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
aj^2 + b + cj &= j(aj + bj^2 + c) \\
&= j((1+i)j + (-1+2i)j^2 + c) \\
&= j(j + ij - j^2 + 2ij^2 + c) \\
&= j(j - j^2 + i(j + 2j^2) + c) \\
&= j(j(1-j)(1+ij) + c)
\end{aligned}$$

Donc

$$ABM \text{ équilatéral} \Leftrightarrow c \in \{(1-j)(j+i), j(j-1)(1+ij)\}$$

Exercice 10.

1. On a vu que l'équation $|z|^2 + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0$ était celle du cercle de centre $-\beta$ et de rayon $\sqrt{|\beta|^2 - \gamma}$. Réciproquement, le cercle de centre x et de rayon r a pour équation $|z|^2 - \overline{x}z - x\overline{z} + (|x|^2 - r^2)$. Les équations complexes respectives des cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sont alors données par

$$\mathcal{C}_1 : |z|^2 - (2+i)\overline{z} - (2-i)z = 0, \qquad \mathcal{C}_2 : |z|^2 - 3i\overline{z} + 3iz + 8 = 0$$

Si z respecte ces deux équations, alors on a par soustraction

$$(2+i-3i)\overline{z} + (2-i+3i)z + 8 = 0 \Leftrightarrow 2\left((1-i)\overline{z} + (1+i)z + 4\right) = 0 \Leftrightarrow (1-i)\overline{z} + (1+i)z + 4 = 0$$

C'est l'équation d'une droite $\mathcal{D}$ (bien-sûr, ceci ne montre pas que l'intersection des deux cercles est une droite : c'est géométriquement impossible, ça prouve par contre que l'intersection fait partie de cette droite).
On a vu dans l'exercice 5 que cette équation pouvait se convertir en l'équation cartésienne $x - y + 2 = 0$, soit $y = x + 2$. On calcule ensuite l'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{C}_2$: soit $z = x + i(x+2) \in \mathcal{D}$, on a

$$|z - 3i|^2 = x^2 + (x-1)^2 = 2x(x-1) + 1$$

donc

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{D} &\Leftrightarrow z = x + i(x+2) \ \text{ et } \ |z-3i|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow z = x + i(x+2) \ \text{ et } \ 2x(x-1)+1 = 1 \\ &\Leftrightarrow z = x + i(x+2) \ \text{ et } \ x(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = x + i(x+2) \ \text{ et } \ (x = 0 \text{ ou } x = 1) \\ &\Leftrightarrow z \in \{2i, 1+3i\} \end{aligned}$$

On vient de montrer que l'intersection de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ était formée d'au plus deux points : $2i$ et $1+3i$, il suffit alors de vérifier que ces deux points sont bien dans $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, il suffit pour cela de remplacer z par $2i$, puis par $1+3i$ dans les équations de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

2. On a déjà fait cela lors de l'exercice 5, la droite passant par α, β est caractérisée par l'équation complexe $z\overline{i(\beta-\alpha)} + \overline{z}i(\beta-\alpha) + 2\mathrm{Im}(a\overline{b})$.

3. On notera

- $s : z \mapsto \overline{z}$ la conjugaison complexe, c'est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
- $r_\theta : z \mapsto e^{i\theta}z$ la rotation (de centre l'origine) et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$
- $h_\lambda : z \mapsto \lambda z$ l'homothétie (de centre l'origine) et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $t_\alpha : z \mapsto z + \alpha$ la translation par $\alpha \in \mathbb{C}$.

Toutes ces transformations géométriques préservent l'alignement, et les distances (à l'exception de h_λ, qui les multiplie par $|\lambda|$).
(a) On a

$$f(z) = \sqrt{2}(1-i)z + i = 2e^{-i\pi/4}z + i$$

autrement dit $f = t_i \circ h_2 \circ r_{-\pi/4}$, donc f préserve l'alignement, et multiplie les distances par 2.
La droite $\mathcal{D}$ est envoyée par f sur la droite passant par $f(1) = \sqrt{2} + i(1-\sqrt{2})$ et $f(i) = \sqrt{2} + i(1+\sqrt{2})$.
Le cercle $\mathcal{C}$ est envoyé par f sur le cercle de centre $f(1+i) = 2\sqrt{2} + i$ et de rayon $2.1 = 2$.
(b) On a

$$g(z) = (1+i)\overline{z+i} = (1+i)\overline{z} - i(1+i) = (1+i)\overline{z} + (1-i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}\overline{z} + (1-i)$$

autrement dit $g = t_{1-i} \circ h_{\sqrt{2}} \circ r_{\pi/4} \circ s$, donc g préserve l'alignement, et multiplie les distances par $\sqrt{2}$.
La droite $\mathcal{D}$ est envoyée par g sur la droite passant par $g(1) = 2$ et $g(i) = 2 - 2i$.
Le cercle $\mathcal{C}$ est envoyé par g sur le cercle de centre $g(1+i) = 3 - i$ et de rayon $\sqrt{2}$.

4. On se trouve sur un plan euclidien classique : pour passer d'une droite donnée à une de ses droite orthogonales, il suffit d'effectuer une rotation d'angle $\pi/2$, autrement dit de multiplier par i. Si $\omega\overline{z} + \overline{\omega}z = k$, alors iz respecte

l'équation

$$-i\omega\overline{z}+\overline{-i\omega}z=k$$

Cette équation est celle d'une droite orthogonale à la droite étudiée, les autres droites orthogonales à la droite étudiée sont des translatées de celle que l'on a trouvé, d'où les équations

$$-i\omega\overline{z}+\overline{-i\omega}z=\lambda,\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Exercice 11. Ce qui fait toute la saveur de cette exercice est la facilité que l'on a à décrire les centres de gravité de triangles dans le plan complexe : son affixe est donnée par la moyenne des affixes des sommets.

1. Le centre de gravité de ABC est donné par $\frac{1}{3}(a+b+c)$, il nous suffit alors pour conclure de montrer que $m+n+l=a+b+c$. On a évidemment

$$m+n+l=\frac{1}{3}((y+c+a)+(c+x+b)+(a+b+z))=\frac{2}{3}(a+b+c)+\frac{1}{3}(x+y+z)$$

Il reste donc à montrer que $x+y+z=a+b+c$.
Dire que les triangles BXC, CYA et AZB ont même orientation (opposée ou égale à celle de ABC) revient à dire que les angles $\widehat{BXC}, \widehat{CYA}$ et $\widehat{AZB}$ sont égaux, tous trois à $-\pi/3$ ou à $\pi/3$. D'après l'exercice 7, on a alors

$$\begin{cases} jb+j^2x+c=0\\ jc+j^2y+a=0\\ ja+j^2z+b=0\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases} j^2b+jx+c=0\\ j^2c+jy+a=0\\ j^2a+jz+b=0\end{cases}$$

En multipliant ces deux systèmes par j et j^2 (respectivement), on a

$$\begin{cases} j^2b+x+jc=0\\ j^2c+y+ja=0\\ j^2a+z+jb=0\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases} jb+x+j^2c=0\\ jc+y+j^2a=0\\ ja+z+j^2b=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-j(jb+c)\\ y=-j(jc+a)\\ z=-j(ja+b)\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases} x=-j(jc+b)\\ y=-j(ja+c)\\ z=-j(jb+a)\end{cases}$$

Dans les deux cas, on a

$$x+y+z=-j(ja+a+jb+b+jc+c)=-j(j+1)(a+b+c)=a+b+c$$

car $j+1=-j^2$. Les centres de gravité des triangles ABC, XYZ, MLN sont donc tous égaux.

2. On va montrer que LMN est équilatéral, on a vu que $3l=b+x+c$, si par exemple $x=-j(jb+c)$, on a

$$3l=b+x+c=(1-j^2)b+(1-j)c=(1-j)((1+j)b+c)=(1-j)(c-j^2b)$$

D'après la question précédente, on a alors

$$\begin{cases} l=\frac{j-1}{3}(c-j^2b)\\ m=\frac{j-1}{3}(a-j^2c)\\ n=\frac{j-1}{3}(b-j^2a)\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases} l=\frac{j-1}{3}(b-j^2c)\\ m=\frac{j-1}{3}(c-j^2a)\\ n=\frac{j-1}{3}(a-j^2b)\end{cases}$$

Dans le premier cas, on a $j^2m+jl+n=0$, dans le second cas, on a $j^2m+l+jn=0$, le triangle LMN est donc équilatéral.