Correction séance 8 (10 novembre)

Feuille de TD 5

Exercice 3.
1. Dans l'exercice précédent, on a

$$N(q) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = \det(M(q))$$

Or on sait déjà que le déterminant est multiplicatif : on a

$$N(qq') = \det(M(qq')) = \det(M(q)M(q')) = \det(M(q))\det(M(q')) = N(q)N(q')$$

2. Par définition, on a

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists q \in \mathbb{H} \mid N(q) = n\}$$

soient $n, m \in \Sigma$, il existe q, q', à coefficients entiers, tels que $N(q) = n$ et $N(q') = m$, on a alors $N(qq') = N(q)N(q') = mm$, et comme qq' est aussi un quaternion à coefficients entiers, $mn \in \Sigma$, qui est donc stable par multiplication.

Exercice 5.
1. On a

$$\overline{q} = a - ib - jc - kd = a - ib + j(-c + id) = \overline{\alpha} - j\overline{\beta}$$

donc

$$M(\overline{q}) = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \beta \\ -\overline{\beta} & \alpha \end{pmatrix} = {}^t\overline{M(q)}$$

2. Un quaternion est de norme 1 si et seulement si $\overline{q} = q^{-1}$, ce qui se déduit directement de la question précédente.

3. On sait déjà que M constitue un morphisme injectif (d'algèbre), en particulier sa restriction à G est un morphisme de groupes, à valeur dans $U_2(\mathbb{C})$. On a de plus $\det(M(\alpha, \beta)) = \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = |\alpha|^2 + |\beta|^2$, donc si $q \in G$, on a $\det(M(q)) = 1$ et $M(q) \in SU_2(\mathbb{C})$.

4. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, si $M \in SU_2(\mathbb{C})$ on a

$$\frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = {}^t\overline{M}$$

On a donc en particulier $a = \overline{d}$ et $c = -\overline{b}$, donc

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = M(a, c)$$

5. On a montré dans la question précédente que $SU_2(\mathbb{C})$ est l'image du morphisme $q \mapsto M(q)$, comme ce morphisme est injectif, on a $SU_2(\mathbb{C}) \simeq G$, d'où le résultat.

Feuille de TD 6

Exercice 1. On a

$$[b,a,c,d] = \frac{b-c}{b-d}\frac{a-d}{a-c} = \frac{a-d}{a-c}\frac{b-c}{b-d} = [a,b,c,d]^{-1} = [a,b,d,c]$$

$$\begin{aligned} 1-[a,b,c,d] &= 1 - \frac{a-c}{a-d}\frac{b-d}{b-c} \\ &= 1 + \frac{a-c}{a-d}\frac{b-d}{c-b} \\ &= \frac{(a-d)(c-b)+(a-c)(b-d)}{(a-d)(c-b)} \\ &= \frac{ac-cd-ab+bd+ab-bc-ad+cd}{(a-d)(c-b)} \\ &= \frac{ac+bd-bc-ad}{(a-d)(c-b)} \\ &= \frac{a-b}{a-d}\frac{c-d}{c-b} = [a,c,b,d] = [d,b,c,a] \end{aligned}$$

$$-\frac{[a,b,c,d]}{[a,c,b,d]} = -\frac{a-c}{a-b}\frac{b-d}{c-d} = [a,d,c,b] = [c,b,a,d]$$

On peut faire agir $\mathfrak{S}_4$ sur l'ensemble des configurations de (a,b,c,d) (en changeant l'ordre justement, par exemple la transposition $(1\ 2)$ envoie (a,b,c,d) sur (b,a,c,d)), on vient de calculer l'action des transpositions, qui engendrent $\mathfrak{S}_4$. Autrement dit, l'action de $\mathfrak{S}_4$ sur $x=[a,b,c,d]$ a pour orbite

$$x, \frac{1}{x}, 1-x, \frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x}, \frac{x}{x-1}$$

En fait, on peut même montrer que l'action de $\mathfrak{S}_4$ se factorise par une action de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 2.

1. Premièrement, le fait que M' soit sur la droite (ΩM) indique que z' est de la forme $c+a(z-c)$ avec $a\in\mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\rangle &= \mathrm{Re}((z-c)\overline{(z'-c)} \\ &= \mathrm{Re}((z-c)\overline{a(z-c)}) \\ &= \mathrm{Re}(a|z-c|^2) = a|z-c|^2 \end{aligned}$$

Ceci est égal à r si et seulement si $a=\frac{r}{|z-c|^2}$, on a alors

$$z' = \frac{r}{(z-c)\overline{(z-c)}}(z-c)+c = \frac{r}{\overline{z-c}}+c$$

2. On peut directement calculer que $i(\Omega,r)$ est une involution grâce à la formule de la question précédente. Mais on peut également revenir à la définition : le point M est sur la droite $(\Omega M')$, et on a $\langle\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega M}\rangle = r$ par hypothèse sur M', donc on a bien $M=i(\Omega,r)(M')$ et $i(\Omega,r)$ est une involution.
Un point $M\in P\setminus\{\Omega\}$ est donc dans l'image de $i(\Omega,r)$, car il est l'image de son image (car $i(\Omega,r)$ est une involution), ensuite, on montre que Ω n'est pas dans l'image. Si M est tel que $i(\Omega,r)(M)=\Omega$, on a

$$c = \frac{r}{\overline{z-c}}+c \Rightarrow \frac{r}{\overline{z-c}} = 0$$

ce qui n'est pas possible car $r \neq 0$, donc l'image de $i(\Omega, r)$ est $P \setminus \{\Omega\}$.

3. On doit montrer que $i(\Omega, r)$ préserve la réalité du birapport. Soient donc s, u, v, w tels que leur birapport soit réel, on note s', u', v', w' leurs images par $i(\Omega, r)$, on a

$$[s', u', v', w'] = \frac{s' - v'}{s' - w'} \frac{u' - w'}{u' - v'}$$

On a

$$s' - v' = r\overline{\left(\frac{1}{s-c} - \frac{1}{v-c}\right)} = r\overline{\left(\frac{v-c-s+c}{(s-c)(v-c)}\right)} = r\frac{\overline{v-s}}{\overline{(s-c)(v-c)}} \quad u' - w' = r\frac{\overline{w-u}}{\overline{(u-c)(w-c)}}$$
$$s' - w' = r\frac{\overline{w-s}}{\overline{(s-c)(w-c)}} \quad u' - v' = r\frac{\overline{v-u}}{\overline{(u-c)(v-c)}}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}
[s', u', v', w'] &= \frac{\overline{v-s}}{\overline{(s-c)(v-c)}} \frac{\overline{w-u}}{\overline{(u-c)(w-c)}} \frac{\overline{(s-c)(w-c)}}{\overline{w-s}} \frac{\overline{(u-c)(v-c)}}{\overline{v-u}} \\
&= \frac{\overline{s} - \overline{v}}{\overline{s} - \overline{w}} \frac{\overline{u} - \overline{w}}{\overline{u} - \overline{v}} \\
&= \overline{[s, u, v, w]}
\end{aligned}$$

Qui est réel si $[s, u, v, w]$ est réel.

4. Notons z, ω les affixes de M et N, et z', ω' leurs images par $i(\Omega, r)$, on a

$$\begin{aligned}
i(M)i(N) = |\omega' - z'| &= \left| \frac{r}{\overline{z-c}} - \frac{r}{\overline{\omega - c}} \right| \\
&= |r| \left| \frac{1}{z-c} - \frac{1}{\omega - c} \right| \\
&= |r| \left| \frac{\omega - c - z + c}{(z-c)(\omega - c)} \right| \\
&= |r| \left| \frac{\omega - z}{(z-c)(\omega - c)} \right| \\
&= |r| \frac{MN}{(\Omega M)(\Omega N)}
\end{aligned}$$