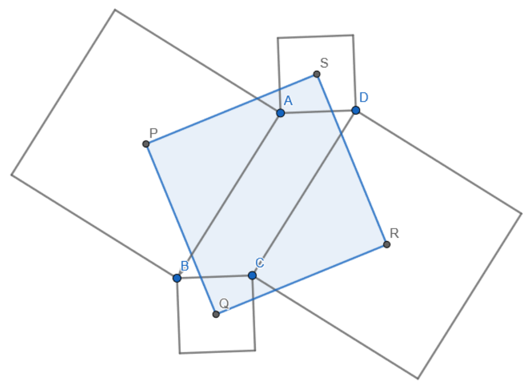
Correction séance 8 (10 novembre)

Feuille de TD 3

Exercice 1.



1. Rappelons nous ce qu'est un carré : notons $AA'B'B$ le carré s'appuyant sur $[AB]$, cela entraîne en particulier que $AA' = AB$ et $\arg(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}) = -\pi/2$, autrement dit $\frac{a'-a}{b-a} = -i$ et $a' = a + i(a-b)$, on obtient de même $b' = i(a-b) + b$, le centre de gravité de $AA'B'B$ est alors donné par

$$p = \frac{1}{4}(a + a' + b' + b) = \frac{1}{4}(2(a+b) + 2i(a-b)) = \frac{a+b+i(a-b)}{2}$$

D'un autre côté, on sait que $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{|1-i|^2} = \frac{1+i}{2}$, donc

$$\frac{a-ib}{1-i} = \frac{(1+i)(a-ib)}{2} = \frac{a-ib+ia+b}{2} = \frac{a+b+i(a-b)}{2}$$

on a donc bien $p = \frac{a-ib}{1-i}$. Le même raisonnement appliqué en remplaçant respectivement A, B par B, C, C, D et D, A donne

$$p = \frac{a-ib}{1-i}, \quad q = \frac{b-ic}{1-i}, \quad r = \frac{c-id}{1-i}, \quad s = \frac{d-ia}{1-i}$$

2. Pour montrer que $PQRS$ est un carré, on va premièrement montrer que c'est un parallélogramme, on a

$$q - p = \frac{b-a-i(c-b)}{1-i} \quad \text{et} \quad r - s = \frac{c-d-i(d-a)}{1-i}$$

comme par hypothèse, $ABCD$ est un parallélogramme, on a $b-a = c-d$ et $c-b = d-a$, donc $q-p = r-s$ et $PQRS$ est un parallélogramme.
Ensuite, il suffit pour conclure de montrer que $PQ = PS$ ($\Rightarrow PQRS$ est un losange), et $\widehat{QPS} = \frac{\pi}{2}$ ($\Rightarrow PQRS$ est un losange à angle droit : un carré), on a

$$\frac{q-p}{s-p} = \frac{b-a-i(c-b)}{d-a-i(a-b)} = \frac{b-a-i(c-b)}{c-b-i(a-b)} = -i$$

soit le résultat voulu.

3. Le nombre complexe $\frac{s-q}{r-p}$ vaut $\pm i$ si et seulement si QS et PR sont de même longueur et se coupent orthogonalement, on a

$$\frac{s-q}{r-p} = \frac{d-b-i(a-c)}{c-a-i(d-b)} = -i$$

d'où le résultat voulu.

Feuille de TD 5

Exercice 2. (Versions matricielles de $\mathbb{H}$)

1.a) Les relations que j'ai donné ne sont pas minimales (j'ai mis ce système car c'est pour moi le plus logique à retenir et à utiliser). On lui substitue le système

$$-1 = I^2 = J^2 = K^2 = IJK$$

Bien-sûr c'est du calcul matriciel rébarbatif, qu'il ne sert pas vraiment de corriger sur papier...

Par contre on peut faire quelque chose qui n'a rien à voir, et montrer que les deux systèmes de relations que j'ai donné sont équivalent !

Selon le système de la feuille (que j'appellerai "système TD"), on a déjà $-1 = I^2 = J^2 = K^2$, et enfin $IJK = KK = -1$, donc le système TD entraîne le système du corrigé.

Réciproquement, le système du corrigé entraîne également $-1 = I^2 = J^2 = K^2$, et on a par ailleurs

$$IJKK = -IJ = -K \quad IIJK = -JK = -I$$

donc $IJ = K$ et $JK = I$, on a aussi

$$\begin{aligned} IJK = -1 &\Rightarrow -JK = -I \\ &\Rightarrow -JKI = 1 \\ &\Rightarrow KI = J \end{aligned}$$

Donc on a bien les relations $IJ = K, JK = I, KI = J$.

Ensuite, comme $IJK = -1$, on a $(IJK)(KJI) = (-1)^3 = -1 = IJK$, donc $KJI = 1$, on obtient donc $KJ = -I$ et $JI = -K$n et $IK = -J$.

On a donc bien montré que le système TD est équivalent au système du corrigé, ils donnent deux ***présentations de l'algèbre des quaternions***.

b). Ici encore c'est un calcul

$$\begin{aligned} M(q) &= a1 + bI + cJ + dK \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ -d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & d & a & -b \\ -d & c & b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Du coup, on obtient aussi

$$M(\overline{q}) = M(a,-b,-c,-d) = \begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ -b & a & d & c \\ -c & -d & a & b \\ d & -c & -b & a \end{pmatrix} = {}^tM(q)$$

c). On a décrit la conjugaison des quaternions via une opération matricielle connue, qui est la transposition, or on sait que la transposition est anticommutative : ${}^t(AB) = {}^tB^tA$, donc

$$M(\overline{q_1q_2}) = {}^tM(q_1q_2) = {}^t(M(q_1)M(q_2)) = {}^tM(q_2)^tM(q_1) = M(\overline{q_2})M(\overline{q_1}) = M(\bar{q}_2\bar{q}_1)$$

d'où le résultat.

2.a) Là encore ce sont des calculs rébarbatifs, donc je vais encore préférer être hors sujet. On a vu qu'un nombre complexe $a+ib$ pouvait se représenter par une matrice réelle $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, si on remplace dans les matrices I, J, K les nombres complexes par leurs représentations matricielles, on retrouve les matrices du cas réel ! Ca permet d'ailleurs de montrer directement la question.
b) C'est très facile : on a

$$q = a + ib + jc + kd = a + ib + jc - jid = a + ib + j(c - id)$$

On vient en fait de montrer que $\mathbb{H}$ peut se voir comme une $\mathbb{C}$ algèbre de dimension 2.
c). On a

$$\begin{aligned} M(q) &= a1 + bI + cJ + dK \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+ib & -c-id \\ c-id & a-ib \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 4.
1. L'ensemble G est défini par

$$G := \{q = a + ib + jc + kd \in \mathbb{H} \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$$

l'identification $G \simeq \mathbb{R}^4$ envoyant $a + ib + jc + kd$ sur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, G est bien envoyé sur la sphère $\mathbb{S}^3$.

2. La $\mathbb{R}$-linéarité de S_q découle des propriétés de la multiplication :

$$S_q(\lambda q' + \mu q'') = q(\lambda q' + \mu q'')\overline{q} = \lambda qq'\overline{q} + \mu qq''\overline{q} = \lambda S_q(q') + \mu S_q(q'')$$

Il est immédiat que S_q est un isomorphisme : son inverse est $S_{q^{-1}} = S_{\overline{q}}$. L'application $q \mapsto S_q$ est donc une application de G vers les automorphismes linéaires de $\mathbb{H}$, en bijection avec $\mathrm{Gl}_4(\mathbb{R})$ (qui sont les automorphismes linéaires de $\mathbb{R}^4$).

3. Il est facile de vérifier que S est un morphisme de groupes : soient $q, q' \in G$, on a

$$S_{qq'}(q'') = (qq')q''\overline{qq'} = qq'q''\overline{q}'\overline{q} = qS_{q'}(q'')\overline{q} = S_q(S_{q'}(q'')) = S_q \circ S_{q'}(q'')$$

Ensuite, pour le noyau, on sait que $S_q(q') = q'$ si et seulement si q et q' commutent, on a donc

$$\text{Ker } S = \{q \in G \mid \forall q' \in \mathbb{H}, qq' = q'q\} = Z(\mathbb{H}) \cap G = \mathbb{R} \cap G = \{\pm 1\}$$

4. On sait que le groupe orthogonal $O_4(\mathbb{R})$ est constitué des matrices qui préservent la norme usuelle de $\mathbb{R}^4$, qui donne $\sqrt{N}$ sur $\mathbb{H}$. Or, on a $N(S_q(q')) = N(q)N(q')N(\overline{q}) = N(q')$, donc S_q préserve la norme, et se trouve dans $O_4(\mathbb{R})$.
Ensuite, l'espace P des quaternions purs est défini par $q + \overline{q} = 0$ (comme pour les nombres complexes...) or, on a

$$S_q(q') + \overline{S_q(q')} = qq'\overline{q} + \overline{qq'\overline{q}} = qq'\overline{q} + q\overline{q'}\overline{q} = q(q' + \overline{q'})\overline{q}$$

donc si $q' \in P$, on a également $S_q(q') \in P$.

5. On a une décomposition en somme orthogonale $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus P$. On a vu que S_q fixe $\mathbb{R}$ ponctuellement, et fixe globalement P, autrement dit, la matrice associée à S_q est de la forme

$$S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_q \end{pmatrix}$$

Et comme $S_q \in O_4(\mathbb{R})$, on a bien $s_q \in O_3(\mathbb{R})$. Ensuite, on a clairement $S_q = I_4$ si et seulement si $s_q = I_3$, donc Ker $s = \{\pm 1\}$.

6. C'est très long en calcul, pour bien faire il faut calculer tous les coefficients de la matrice s_q, on va admettre que j'ai tout bien fait du premier coup et obtenu

$$s_{a+ib+jc+kd} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 2(bc - ad) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(ab + cd) & d^2 + a^2 - b^2 - c^2 \end{pmatrix}$$

On constate que les coordonnées de s sont continues, donc s est continue.

7. Considérons la composition de s et du déterminant, on obtient un morphisme continu $G \to \{\pm 1\}$. Comme G est connexe (homéomorphe à $\mathbb{S}^3$), l'image de cette application continue est un singleton, et comme $\det(s(1)) = 1$, ce singleton est $\{1\}$ et pas $\{-1\}$, donc $s(G) \subset \text{Ker } \det = SO_3(\mathbb{R})$.

8. Soit $p \in P \cap G$, on commence par noter que $s_p(p) = pp\overline{p} = p$, donc s_p admet un point fixe p : il s'agit d'une rotation d'axe $\text{Vect}(p)$.
Ensuite, comme $p \in G \cap P$, on a $p^{-1} = \overline{p} = -p$ donc $p^2 = -p\overline{p} = -1$ et $(s_p)^2 = s_{p^2} = s_{-1} = 1$, donc s_p est une involution et une rotation : c'est une rotation d'angle π : un renversement.

9. Il suffit de montrer que $\text{Im}\, s$ contient tous les renversements (car ceux-ci engendrent $SO_3(\mathbb{R})$), soit donc un renversement d'axe p avec $p \in P$, le renversement voulu est obtenu par $s_{p/\sqrt{N(p)}}$

10. Le morphisme s est surjectif et admet $\{\pm 1\}$ comme noyau, on conclut par le premier théorème d'isomorphisme.

11. L'homéomorphisme entre G et $\mathbb{S}^3$ permet de munir ce dernier d'une structure de groupe, et on conclut par la question précédente.