Correction séance 6 (20 octobre)

Feuille de TD 3

Exercice 7. On peut premièrement remarquer que z, z^2 et z^4 sont évidemment alignés si $z = z^2, z = z^4$ ou $z^2 = z^4$ (car il n'y a dans ce cas là que deux points distincts, non trois). On suppose donc que z, z^2, z^4 sont distincts deux à deux, auquel cas ils sont alignés si et seulement si

$$\frac{z^4 - z}{z^2 - z} = \frac{z^3 - 1}{z - 1} = \frac{(z-1)(z-j)(z-j^2)}{z-1} = (z-j)(z-j^2) = z^2 - jz - j^2 z + 1 = z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$$

en posant $z = a + ib$, on a

$$z^2 + z = (a^2 - b^2 + 2iab) + a + ib = a + a^2 - b^2 + i(2ab + b) = a + a^2 - b^2 + ib(2a+1)$$

Donc z^2+z+1 est réel (si et seulement si z^2+z est réel) si et seulement si $b(2a+1) = 0$, l'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ z = a + ib \in \mathbb{C} \;\middle|\; b = 0 \text{ ou } a = \frac{-1}{2} \right\} = \left\{ \frac{-1}{2} + ib \mid b \in \mathbb{R} \right\} \cup \mathbb{R}$$

(on pouvait deviner que $z \in \mathbb{R}$ serait toujours une solution : dans ce cas, z, z^2, z^4 sont tous trois des réels, donc 'alignés' vu comme points du plan).

Exercice 10. On sait que les translations par des vecteurs à coordonnées entières préservent les points à coordonnées entières, autrement dit, on peut (en translatant par z_A) supposer que A a pour affixe $a = 0$.
Ensuite, on a par hypothèse $z_B = b_1 + ib_2$ avec $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$. Ensuite, quitte à supposer que $ABCD$ est direct, le point D est image de B par la rotation de centre $A = 0$ et d'angle $\pi/2$, autrement dit

$$z_D = iz_B = i(b_1 + ib_2) = -b_2 + ib_1$$

est également à coordonnées entières. Enfin, comme $ABCD$ est en particulier un parallélogramme, on a $z_B - z_A = z_C - z_D$, donc $z_C = z_B + z_D$ est aussi à coordonnées entières, d'où le résultat.
Le cas du carré reposait essentiellement sur le fait que la multiplication par $i = e^{i\pi/2}$ préserve le fait que les coordonnées sont entières, dans le cas d'un triangle, on effectue une rotation d'angle $\pi/3$, or la multiplication par $e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ne préserve pas le fait que les coordonnées soient entières :

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(a + ib) = \frac{a - \sqrt{3}b}{2} + i\frac{b + a\sqrt{3}}{2}$$

Si a et b sont des entiers non tous nuls, alors

- Si $b \neq 0$, alors $x = \frac{a - \sqrt{3}b}{2}$ n'est pas entier, en effet, on a

$$2x = a - \sqrt{3}b \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a - 2x}{b}$$

  donc $\sqrt{3}$ serait un rationnel si $x \in \mathbb{Z}$, ce qui est faux.
- Si $a \neq 0$, alors $y = \frac{b + a\sqrt{3}}{2}$ n'est pas un entier, en effet, on a

$$2y = b + a\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{2y - b}{a}$$

  donc $\sqrt{3}$ serait un rationnel si $y \in \mathbb{Z}$, ce qui est faux.

Exercice 11. Notons $a = e^{i\alpha}$, on a $z_r = e^{i\theta_r}$ avec

$$\begin{aligned} n\theta_r \equiv \alpha[2\pi] &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid n\theta_r \alpha + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \ \mid \theta_r = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n} \\ &\Leftrightarrow \theta_r \in \left\{\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\} \end{aligned}$$

Quitte à réordonner les z_r, on peut supposer que $\theta_r = \frac{\alpha}{n} + (r-1)\frac{2\pi}{n}$. De façon générale, on a,

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right) = 2e^{i\theta/2}\cos(\theta/2)$$

Et donc

$$\frac{1+z_r}{1+z_1} = \frac{2e^{i\theta_r/2}\cos(\theta_r/2)}{2e^{i\theta_1/2}\cos(\theta_1/2)} = e^{i/(\theta_r-\theta_1)/2}\frac{\cos(\theta_r/2)}{\cos(\theta_1/2)}$$

Par ailleurs, on a $(\theta_r - \theta_1)/2 = (r-1)\frac{\pi}{n}$, d'où

$$\left(\frac{1+z_r}{1+z_1}\right)^n = e^{(r-1)\pi}\left(\frac{\cos(\theta_r/2)}{\cos(\theta_1/2)}\right)^n = (-1)^{r-1}\left(\frac{\cos(\theta_r/2)}{\cos(\theta_1/2)}\right)^n \in \mathbb{R}$$

Enfin, on a, pour r, r' différents de 1 :

$$\frac{(1+z_r)^n - (1+z_1)^n}{(1+z_{r'})^n - (1+z_1)^n} = \frac{\left(\frac{1+z_r}{1+z_1}\right)^n - 1}{\left(\frac{1+z_{r'}}{1+z_1}\right)^n - 1} \in \mathbb{R}$$

Donc les points $z_1, z_r, z_{r'}$ sont alignés, ceci étant vrai quels que soient r, r', on a bien le résultat voulu.

Feuille de TD 4

Exercice 1.

1. Cela vient directement de la définition d'un corps : la multiplication est associative par définition d'un anneau, il existe un élément neutre (noté 1) par définition d'un anneau unitaire, et tout élément est inversible par définition d'un corps. En fait, on a même que $\mathbb{k}^*$ est un groupe abélien (ce dernier point fait un tout petit peu débat : certaines références ne demandent pas qu'un corps soit commutatif).

2. L'action est donnée par

$$\forall \lambda \in \mathbb{k}^*, x = (x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{k}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad \lambda.x = (\lambda x_0, \cdots, \lambda x_n)$$

On remarque bien que cette application préserve le fait que les x_i soient non tous nuls (justement car $\lambda \in \mathbb{k}^*$). Montrons qu'il s'agit là d'une action de groupe

- Pour $x \in \mathbb{k}^{n+1} \setminus \{0\}$, on a bien sur $1.x = x$, justement car 1 est l'élément neutre de $\mathbb{k}$.
- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{k}^*$, pour $x \in \mathbb{k}^{n+1} \setminus \{0\}$, on a

$$\begin{aligned} \lambda.(\mu.x) &= \lambda.(\mu x_0, \cdots, \mu x_n) \\ &= (\lambda(\mu x_0), \cdots, \lambda(\mu x_n) \\ &= ((\lambda\mu)x_0, \cdots, (\lambda\mu)x_n) \\ &= (\lambda\mu).(x_0, \cdots, x_n) = (\lambda\mu).x \end{aligned}$$

Ce qui montre bien le résultat voulu.

Cela revient simplement à dire qu'un vecteur non nul de $\mathbb{k}^{n+1}$ engendre une droite vectorielle bien définie, et deux vecteurs engendrent la même droite si et seulement si ils sont colinéaires, ce qui est bien la relation proposée.

4. On peut toujours considérer l'application $x \mapsto \mathrm{Vect}(x)$, qui prend un élément de $\mathbb{k}^{n+1} \setminus \{0\}$ et donne la droite vectorielle qu'il engendre. Il reste à montrer que cette application induit la bijection souhaitée, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(a) = \mathcal{O}(b) &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{k}^* \mid \lambda.a = b \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Vect}(a) = \mathrm{Vect}(b)\end{aligned}$$

Donc l'application étudiée s'induit sur l'espace des orbites en une bijection.

Exercice 2.
1. C'est à nouveau une action déjà connue, il s'agit simplement de comprendre que c'était une action de groupe depuis le départ.

- L'identité I_n est bien sur telle que $I_n.x = x$ pour $x \in \mathbb{k}^n$.
- Le produit des matrices est associatif, donc $M.(N.x) = MNx = M.(N.x)$, ce qui prouve bien que l'on a une action de groupe.

2. Premièrement, il est clair que, pour $M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{k})$, on a $M.0 = 0$, donc l'orbite de 0 est bien réduite à $\{0\}$. Ensuite, soit $x \in \mathbb{k}^n \setminus \{0\}$, on sait par le théorème de la base incomplète que x se complète en $(x, x_2, \cdots, x_n)$ une base de k^n. Ces vecteurs, vus comme des matrices de taille $n \times 1$, forment les colonnes d'une matrice M de $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{k})$, en notant $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, on a $M.e_1 = x$, donc x est dans l'orbite de e_1. Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{k}^n \setminus \{0\}$, tous ces éléments sont dans la même orbite sous l'action de M.

3. En posant $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{k}^n$, on obtient que Me_i est la i-ème colonne de M, comme par hypothèse $Me_i = e_i$, la i-ème colonne de M doit être e_i, autrement dit $M = I_n$.

Supplément : inversion en projectif
On se place dans $\mathbb{k}P^1$, un point de $\mathbb{k}P^1$ est désigné par ses coordonnées homogènes $[x : y]$, où $x, y \in \mathbb{k}$ sont non tous nuls. On définit une bijection $f : \mathbb{k} \cup \{\infty\} \to \mathbb{k}P^1$ en posant

$$\begin{cases} f(x) = [1 : x] & \text{pour } x \in \mathbb{k} \\ f(\infty) = [0 : 1] \end{cases}$$

La bijection réciproque $f^{-1} : \mathbb{k}P^1 \to \mathbb{k} \cup \{\infty\}$ est définie par

$$\begin{cases} f^{-1}([x : y]) = \frac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f^{-1}([0 : y]) = f^{-1}([0 : 1]) = \infty \end{cases}$$

Ceci est bien une bijection, en effet

1. Pour $x \in \mathbb{k}$, on a $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}([1 : x]) = x$
2. On a $f^{-1}(f(\infty)) = f^{-1}([0 : 1]) = \infty$
3. Pour $[x : y] \in \mathbb{k}P^1$ avec $x \neq 0$, on a $f(f^{-1}([x : y])) = f(y/x) = [1 : y/x] = [x : y]$
4. On a $f(f^{-1}([0 : 1])) = f(\infty) = [0 : 1]$.

Cette bijection nous permet « d'identifier »les ensembles $\mathbb{k} \cup \{\infty\}$ et $\mathbb{k}P^1$. On a par ailleurs une fonction bien connue de $\mathbb{k} \cup \{\infty\}$ qui est l'inversion :

$$i(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \in \mathbb{k}^* \\ \infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = \infty \end{cases}$$

Que donne cette fonction quand on la voit comme fonction de $\mathbb{k}P^1$? La réponse à ceci se calcule avec notre identification f, c'est la fonction $f \circ i \circ f^{-1}$. Soit $[x : y] \in \mathbb{k}P^1$, on a

- Si $x \neq 0$, $f(i(f^{-1}([x:y]))) = f(i(y/x))$
  * Si $y = 0$, alors ceci est égal à $f(i(0)) = f(\infty) = [0:1] = [y:x]$
  * Si $y \neq 0$, alors ceci est égal à $f(x/y) = [1:x/y] = [y:x]$
- Si $x = 0$, alors $y \neq 0$, et on a $f(i(f^{-1}([0:y]))) = f(i(f^{-1}([0:1]))) = f(i(\infty)) = f(0) = [1:0] = [y:x]$

Dans tous les cas, on a $f(i(f^{-1}([x:y]))) = [y:x]$ d'où le slogan suivant : « En projectif, l'inversion est l'échange des coordonnées »