Correction séance 5 (6 octobre)

Cercles, droites et équations :

Ceci est un rappel des différents liens entre les équations complexes et les cercles/droites (ils sont montrés lors des exercices 5 et 6 du TD 1).

Droite : Une droite D peut être caractérisée par

1. Une équation complexe de la forme $\beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0$ avec $\beta \in \mathbb{C}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.
2. Une équation cartésienne (réelle) de la forme $ux + vy + w = 0$ avec $u, v, w \in \mathbb{R}$.
3. Deux de ses points A et B, d'affixe respectives a et b.

Comment naviguer entre ces différentes caractérisations ?

1. Si D a pour équation complexe $\beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0$
   (a) une équation cartésienne de D est donnée pour $u = 2\text{Re}(\beta), v = 2\text{Im}(\beta)$ et $w = \gamma$.
   (b) Si β est imaginaire pur, alors $(0, \frac{-\gamma}{2\text{Im}(\beta)}), (1, \frac{-\gamma}{2\text{Im}(\beta)}) \in D$
   Si β est réel, alors $(\frac{-\gamma}{2\text{Re}(\beta)}, 0), (\frac{-\gamma}{2\text{Re}(\beta)}, 1) \in D$
   Si β n'est ni réel ni imaginaire pur, alors $(0, \frac{-\gamma}{2\text{Im}(\beta)}), (\frac{-\gamma}{2\text{Re}(\beta)}, 0) \in D$
2. Si D a pour équation cartésienne $ux + vy + w = 0$
   (a) Une équation complexe de D est donnée pour $\beta = \frac{u+iv}{2}$ et $\gamma = w$.
   (b) Si $u = 0$, alors $(0, \frac{-w}{v})$, $(1, \frac{-w}{v}) \in D$
   Si $v = 0$, alors $(\frac{-w}{u}, 0), (\frac{-w}{u}, 1) \in D$
   Si $uv \neq 0$, alors $(0, \frac{-w}{v}), (\frac{-w}{u}, 0) \in D$.
3. Si D passe par les points A et B
   (a) équation complexe de D est donnée pour $\beta = i(b - a)$ et $\gamma = 2\text{Im}(a\overline{b})$.
   (b) Une équation cartésienne est donnée pour $u = -\text{Im}(b - a)$, $v = \text{Re}(b - a)$, $w = 2\text{Im}(a\overline{b})$.

Cercles : Une équation de cercle dans $\mathbb{C}$ est de la forme $\alpha|z|^2 + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0$, cette équation est celle du cercle de centre $\frac{-\beta}{\alpha}$ et de rayon $\frac{\sqrt{|\beta|^2 - \alpha\gamma}}{|\alpha|}$ (il faut vérifier que le rayon est positif, sans quoi l'équation n'a pas de solutions).

Réciproquement, le cercle $\mathcal{C}(x, r)$ a pour équation complexe $|z|^2 - \overline{x}z - x\overline{z} + |x|^2 - r^2 = 0$

Exercice 4. Toutes les applications considérées sont des similitudes directes.
1. On rappelle que $\frac{1}{i} = -i$, donc $f_1(z) = -iz$. Comme $-i \neq 1$, f_1 est une similitude à centre, de centre 0, il s'agit d'une rotation, de centre 0, et d'angle $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$
2. La similitude f_2 est clairement une translation de vecteur $\binom{2}{1}$, qui n'admet pas de points fixes.
3. La similitude f_3 a pour rapport $1 + i\sqrt{3} \neq 1$, elle admet donc un unique point fixe $\frac{\sqrt{3}(i-1)}{i\sqrt{3}} = i + 1$. Ensuite, le rapport de f_3 est $1 + i\sqrt{3} = 2(-j^2)$, donc f_3 est la composée d'une homothétie de centre $i+1$ et de rapport 2, et d'une rotation de centre $i+1$ et d'angle $\arg(-j^2) = \pi/3$.
4. La similitude f_4 a un rapport différent de 1, elle admet donc un unique point fixe $\frac{-i\tan(\alpha)}{-i\tan(\alpha)} = 1$. Il s'agit de la composée d'une homothétie, de centre 1 et de rapport $\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos(\alpha)}$, et d'une rotation de centre 1 d'angle $\arg(1 + \tan(\alpha)) = \alpha$

Exercice 5.
1. L'application f est une similitude directe par construction, avec $\alpha = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}$ et $\beta = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/6}$. Comme $\alpha \neq 1$, f est une similitude à centre, son unique point fixe a pour affixe

$$\omega = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\frac{4}{1-i\sqrt{3}} = 2$$

Son rapport est $\left|\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, son angle est $\arg\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$
2. On sait que

$$\frac{\omega - f(z)}{\omega - z} = \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} = \alpha$$

donc $\omega - f(z) = \alpha(\omega - z)$, on a alors

$$\frac{z - f(z)}{\omega - f(z)} = \frac{(1-\alpha)z - \beta}{\alpha(\omega - z)} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{z-\omega}{\omega - z} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

Or, on a $\alpha - 1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}e^{2i\pi/3}$, donc $\frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\pi/2} = \frac{i}{\sqrt{3}}$, donc l'angle $\widehat{Mf(M)\Omega}$ est droit, ce qu'il fallait démontrer.

Preuve alternative : avec le théorème d'Al-Kashi, on sait que

$$\Omega f(M) = |\omega - f(z)| = |\alpha||\omega - z| = \frac{\sqrt{3}}{2}\Omega M$$

on a donc

$$\begin{aligned} f(M)M &= \Omega M^2 + \Omega f(M)^2 - 2\Omega M \Omega f(M)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \Omega M^2 + \frac{3}{4}\Omega M^2 - \frac{3}{2}\Omega M^2 \\ &= \Omega M^2 - \frac{3}{4}\Omega M^2 \\ &= \Omega M^2 - \Omega f(M)^2 \end{aligned}$$

On conclut alors par (la réciproque du) théorème de Pythagore.

Exercice 6.

1. Premièrement, il est clair que l'identité (qui est une similitude !) fixe z_0. Ensuite, si ϕ et ψ sont des similitudes qui fixent z_0, alors

$$\phi \circ \psi(z_0) = \phi(\psi(z_0)) = \phi(z_0) = z_0$$

donc $\phi \circ \psi$ fixe z_0. Enfin, on a

$$\phi(z_0) = z_0 \Rightarrow z_0 = \phi^{-1}(z_0)$$

donc ϕ^{-1} fixe également z_0 : L'ensemble $\mathrm{Sim}^+_{z_0}$ est donc non vide, stable par composition et passage à l'inverse : c'est un sous-groupe de Sim^+.

2. Soit $\phi : z \mapsto \alpha z + \beta$ une similitude directe, si $\alpha \neq 1$, son seul point fixe est $\frac{\beta}{1-\alpha}$, donc $\phi \in \mathrm{Sim}^+_{z_0}$ si et seulement si $\beta = (1-\alpha)z_0$, d'où

$$\mathrm{Sim}^+_{z_0} = \{\phi : z \mapsto \alpha z + z_0(1-\alpha) = \alpha(z - z_0) + z_0 \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$$

Ensuite, soient $\phi, \phi' \in \mathrm{Sim}^+_{z_0}$, on a $\phi(z) = \alpha(z - z_0) + z_0$ et $\phi'(z) = \alpha'(z - z_0) + z_0$, donc

$$\phi \circ \phi'(z) = \alpha(\phi'(z) - z_0) + z_0 = \alpha\alpha'(z - z_0) + z_0 = \phi' \circ \phi(z)$$

donc $\phi \circ \phi' = \phi' \circ \phi$ et $\mathrm{Sim}^+_{z_0}$ est abélien. (On peut en fait montrer que $\mathrm{Sim}^+_{z_0}$ est isomorphe à $(\mathbb{C}^*, \times)$).

3. Soit $\phi \in \mathrm{Sim}^+_0$, on a vu dans la question précédente que $\phi(z) = \alpha(z - 0) + 0 = \alpha z$ pour un $\alpha \in \mathbb{C}$. On pose $t_{z_0} : z \mapsto z + z_0$ la translation par z_0, on a

$$t_{z_0} \circ \phi \circ (t_{z_0})^{-1}(z) = t_{z_0}(\phi(z - z_0)) = t_{z_0}(\alpha(z - z_0)) = \alpha(z - z_0) + z_0$$

Cette similitude envoie 0 sur $z_0(1-\alpha)$. Si $\alpha \neq 0$, ceci n'est pas égal à 0, et $t_{z_0} \circ \phi \circ (t_{z_0})^{-1}$ ne fixe pas 0 : Le sous-groupe Sim^+_0 n'est donc pas distingué.

4. Soit $\phi : z \mapsto \alpha z + \beta$, on a

$$\phi(z) = z \Rightarrow (\alpha - 1)z = -\beta$$

Si $\alpha = 1$ (i.e ϕ est une translation), l'équation devient $\beta = 0$, donc ϕ admet des points fixes si et seulement si $\beta = 0$ (auquel cas ϕ est l'identité).
Si $\alpha \neq 1$, alors $\frac{\beta}{1-\alpha}$ est l'unique point fixe de ϕ.
Ainsi, si ϕ est une similitude qui fixe deux points distincts, alors $\phi = Id$.

5. Soit $\phi : z \mapsto \alpha z + \beta$ une similitude directe. Soient A, B deux points de D, l'image de D par ϕ est la droite passant par $\phi(A)$ et $\phi(B)$, on a donc $D = \phi(D)$ si et seulement si $\phi(A), \phi(B) \in D$.
En l'occurrence, la droite D passe par 0 et i, avec

$$\phi(0) = \beta \quad \text{et} \quad \phi(i) = \alpha i + \beta$$

On doit donc avoir $\beta \in D = i\mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$, d'où

$$\mathrm{Stab}(D) = \{\phi : z \mapsto xz + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Montrons à présent que $\mathrm{Stab}(D)$ est un sous-groupe de Sim^+. Premièrement, il est clair que l'identité stabilise D, ensuite, si ϕ et ψ sont des similitudes qui stabilisent D, alors

$$\phi \circ \psi(D) = \phi(\psi(D)) = \phi(D) = D$$

donc $\phi \circ \psi$ stabilise D. Enfin, on a

$$\phi(D) = D \Rightarrow D = \phi^{-1}(D)$$

donc ϕ^{-1} stabilise également D : L'ensemble $\mathrm{Stab}(D)$ est donc non vide, stable par composition et passage à l'inverse : c'est un sous-groupe de Sim^+.

Exercice 7.

1. On pose $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$, de sorte que

$$s(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}z = \alpha z$$

En particulier, $A_n = s^n(A_0)$ a pour affixe $a_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}6$, l'argument de a_n est donc $\frac{n\pi}{6}[2\pi]$, en particulier si $n = 12$, cet argument est 0 : A_{12} est sur l'axe des réels.

2. L'angle $\widehat{A_nA_{n+1}}O$ est donné par l'argument de $\frac{a_n - a_{n+1}}{0 - a_{n+1}}$, on a

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{0 - a_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{(\alpha^{n+1} - \alpha^n)6}{\alpha^n 6} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

On calcule donc $\alpha - 1 = \frac{-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{2i\pi}{3}}$, l'argument de $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ est alors $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, ce qui est bien le résultat recherché : le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

3. On a

$$A_nA_{n+1} = |a_{n+1} - a_n| = |6\alpha^n(\alpha - 1)| = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |\alpha - 1| = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \cdots A_{11}A_{12}$ est alors donnée par

$$\ell = \sum_{k=0}^{11} 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k = 3\frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3(2^{12} - 3^6)}{2^{11}(2 - \sqrt{3})}$$