Correction TD 3

Cercles, droites et équations :

Ceci est un rappel des différents liens entre les équations complexes et les cercles/droites (ils sont montrés lors des exercices 5 et 6 du TD 1).

Droite : Une droite D peut être caractérisée par

1. Une équation complexe de la forme $\beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0$ avec $\beta \in \mathbb{C}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.
2. Une équation cartésienne (réelle) de la forme $ux + vy + w = 0$ avec $u, v, w \in \mathbb{R}$.
3. Deux de ses points A et B, d'affixe respectives a et b.

Comment naviguer entre ces différentes caractérisations ?

1. Si D a pour équation complexe $\beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0$
   (a) une équation cartésienne de D est donnée pour $u = 2\mathrm{Re}(\beta), v = 2\mathrm{Im}(\beta)$ et $w = \gamma$.
   (b) Si β est imaginaire pur, alors $(0, \frac{-\gamma}{2\mathrm{Im}(\beta)}), (1, \frac{-\gamma}{2\mathrm{Im}(\beta)}) \in D$
   Si β est réel, alors $(\frac{-\gamma}{2\mathrm{Re}(\beta)}, 0), (\frac{-\gamma}{2\mathrm{Re}(\beta)}, 1) \in D$
   Si β n'est ni réel ni imaginaire pur, alors $(0, \frac{-\gamma}{2\mathrm{Im}(\beta)}), (\frac{-\gamma}{2\mathrm{Re}(\beta)}, 0) \in D$
2. Si D a pour équation cartésienne $ux + vy + w = 0$
   (a) Une équation complexe de D est donnée pour $\beta = \frac{u+iv}{2}$ et $\gamma = w$.
   (b) Si $u = 0$, alors $(0, \frac{-w}{v})$, $(1, \frac{-w}{v}) \in D$
   Si $v = 0$, alors $(\frac{-w}{u}, 0), (\frac{-w}{u}, 1) \in D$
   Si $uv \neq 0$, alors $(0, \frac{-w}{v}), (\frac{-w}{u}, 0) \in D$.
3. Si D passe par les points A et B
   (a) équation complexe de D est donnée pour $\beta = i(b - a)$ et $\gamma = 2\mathrm{Im}(a\bar{b})$.
   (b) Une équation cartésienne est donnée pour $u = -\mathrm{Im}(b - a)$, $v = \mathrm{Re}(b - a)$, $w = 2\mathrm{Im}(a\bar{b})$.

Cercles : Une équation de cercle dans $\mathbb{C}$ est de la forme $\alpha|z|^2 + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0$, cette équation est celle du cercle de centre $\frac{-\beta}{\alpha}$ et de rayon $\frac{\sqrt{|\beta|^2-\alpha\gamma}}{|\alpha|}$ (il faut vérifier que le rayon est positif, sans quoi l'équation n'a pas de solutions).

Réciproquement, le cercle $\mathcal{C}(x, r)$ a pour équation complexe $|z|^2 - \overline{x}z - x\overline{z} + |x|^2 - r^2 = 0$

Feuille de TD 1

Exercice 5. On utilise que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté par le nombre complexe $b-a$ ('la fin moins le début').
1.(a) Géométriquement, le point M est sur la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires. On a donc la suite de propriétés équivalentes suivantes

- $M \in (AB)$.
- $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires.
- Il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{BM}$.
- Il existe un réel λ tel que $z-a = \lambda(z-b)$.
- $\frac{z-a}{z-b} = \lambda \in \mathbb{R}$ (cette dernière propriété est équivalente car on suppose $z \neq b$, pour pouvoir diviser).

Or, on a

$$\frac{z-a}{z-b} = \frac{(z-a)(\overline{z}-\overline{b})}{(z-b)\overline{(z-b)}} = \frac{(z-a)(\overline{z}-\overline{b})}{|z-b|^2}$$

donc $\frac{z-a}{z-b}$ est réel si et seulement si $(z-a)(\overline{z}-\overline{b})$ est réel.
(b) Compte tenu de la première question, on va en fait <u>construire</u> β et γ (et pas seulement montrer l'existence, oui c'est différent). On rappelle qu'un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, or on sait que

$$\mathrm{Im}(x) = \frac{x-\overline{x}}{2i} = \frac{-i}{2}(x-\overline{x})$$

Donc le nombre x est réel si et seulement si $i(x-\overline{x}) = 0$. On va appliquer ce critère à l'expression $(z-a)(\overline{z}-\overline{b})$: on a

$$(z-a)(\overline{z}-\overline{b}) = z\overline{z} - a\overline{z} - z\overline{b} + a\overline{b} = -a\overline{z} - \overline{b}z + a\overline{b} + |z|^2$$

et donc $(z-a)(\overline{z}-\overline{b})$ est réel si et seulement si

$$\begin{aligned} 0 = i(-a\overline{z} - \overline{b}z + a\overline{b} + |z|^2 - \overline{(-a\overline{z} - \overline{b}z + a\overline{b} + |z|^2)}) &= i(-a\overline{z} - \overline{b}z + a\overline{b} + |z|^2 + \overline{a}z + b\overline{z} - \overline{a}b - |z|^2) \\ &= i(z(\overline{a}-\overline{b}) + \overline{z}(b-a) + a\overline{b} - \overline{a}b) \\ &= z\overline{i(b-a)} + \overline{z}i(b-a) + 2\mathrm{Im}(a\overline{b}) \end{aligned}$$

En posant $\beta = i(b-a)$ et $\gamma = 2\mathrm{Im}(a\overline{b})$, on obtient bien le résultat voulu.
2. Une équation caractéristique de D est de la forme $ax+by+c=0$, où les paramètres a,b,c sont des nombres réels (a et b ne sont plus les affixes des points A et B de la question précédente). Soit $M=(x,y)$ un point de P, d'affixe $z = x+iy$, on sait que

$$x = \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad y = \mathrm{Im}(z) = \frac{-i(z-\overline{z})}{2}$$

On a donc que M est dans D si et seulement si

$$0 = a\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right) + b\left(\frac{-i(z-\overline{z})}{2}\right) + c = \left(\frac{a-ib}{2}\right)z + \left(\frac{a+ib}{2}\right)z + c$$

On retrouve la caractérisation précédente pour $\beta = \frac{a+ib}{2}$ et $\gamma = c$.

Exercice 6.
1.(a) Si $\alpha = \beta = 0$, l'équation étudiée devient $\gamma = 0$, c'est une équation qui ne dépend pas de z, et l'ensemble des solutions est donnée par

$$\mathbb{C} \text{ si } \gamma = 0 \quad \text{et} \quad \varnothing \text{ si } \gamma \neq 0$$

(b) Si $\alpha = 0$, l'équation étudiée devient $\beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0$, l'ensemble des solutions est alors donné par une droite, dont l'équation cartésienne est (d'après l'exercice précédent) $2\mathrm{Re}(\beta)x + 2\mathrm{Im}(\beta)y + c = 0$.
C'est le cas le plus compliqué, premièrement, considérons le cas $\alpha = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 = |z|^2 + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma &= (\beta+z)(\overline{\beta}+\overline{z}) + \gamma' - |\beta| \\ &\Leftrightarrow |\beta|^2 - \gamma = |\beta+z|^2 \end{aligned}$$

- Si $\gamma > |\beta|^2$, cette équation n'a pas de solutions.
- Si $\gamma \leqslant |\beta|^2$, les solutions prennent la forme d'un cercle, de centre $-\beta$, et de rayon $\sqrt{|\beta|^2 - \gamma}$.

À présent, si $\alpha \neq 0$ est réel, on a en divisant par α

$$0 = \alpha|z|^2 + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma \Leftrightarrow 0 = |z|^2 + \beta'\overline{z} + \overline{\beta'}z + \gamma'$$

avec $\beta' = \beta/\alpha$ et $\gamma' = \gamma/\alpha$. Le cas $\alpha = 1$ nous apprend alors que

- Si $\gamma' > |\beta'|^2$, i.e $\alpha\gamma > |\beta|^2$, alors cette équation n'a pas de solutions
- Si $\alpha\gamma \leqslant |\beta|^2$, alors les solutions prennent la forme d'un cercle, de centre $-\beta' = -\beta/\alpha$ et de rayon $\frac{\sqrt{|\beta|^2-\alpha\gamma}}{|\alpha|}$

2. On peut déjà commencer par évacuer le point $\lambda = 1$, qui donne

$$E_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = |z-b|\}$$

l'ensemble étudié est la droite médiatrice des points d'affixe a et b.
De façon générale, on a

$$\begin{aligned}|z-a| = \lambda|z-b| &\Leftrightarrow (z-a)\overline{(z-a)} = \lambda^2\overline{(z-b)}(z-b)\\ &\Leftrightarrow |z|^2 - a\overline{z} - \overline{a}z + |a|^2 = \lambda^2(|z|^2 - b\overline{z} - \overline{b}z + |b|^2)\\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)^2|z|^2 + (\lambda^2 b - a)\overline{z} + \overline{(\lambda^2 b - a)}z + |a|^2 - \lambda^2|b|^2 = 0\end{aligned}$$

Une équation qui a un sens différent selon les valeurs de λ !

- Si $(1-\lambda^2) = 0$ et $\lambda^2 b - a = 0$, autrement dit $\lambda = 1$ et $b = a$, l'équation devient $0 = 0$ (c'est logique ! dans ce cas on a $E_\lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = |z-a|\}$, c'est tout le plan complexe !
- Si $(1-\lambda^2) = 0$ (i.e $\lambda = 1$) et $a \neq b$, on obtient l'équation $(b-a)\overline{z} + \overline{(b-a)}z + |a|^2 - |b|^2 = 0$, c'est l'équation de la médiatrice de a et b.
- Si $\lambda \neq 1$ et $a \neq b$, on retrouve l'équation d'un cercle avec $\alpha = (1-\lambda^2), \beta = (\lambda^2 b - a), \gamma = |a|^2 - \lambda^2|b|^2$. On calcule

$$\begin{aligned}|\beta|^2 - \alpha\gamma &= (\lambda^2 b - a)(\lambda^2\overline{b} - \overline{a}) - (1-\lambda^2)(|a|^2 - \lambda^2|b|^2)\\ &= (\lambda^4|b|^2 - \lambda^2 a\overline{b} - \lambda^2 b\overline{a} + |a|^2) - (|a|^2 - \lambda^2|b|^2 - \lambda^2|a|^2 + \lambda^4|b|^2)\\ &= \lambda^2(|b|^2 + |a|^2 - a\overline{b} - b\overline{a})\\ &= \lambda^2|a-b|^2\end{aligned}$$

Qui est toujours positif, on obtient donc bien un cercle, de centre $-\frac{\lambda^2 b - a}{1-\lambda^2}$ et de rayon $\frac{\lambda|a-b|}{|1-\lambda^2|}$

Exercice 7. ATTENTION : Contrairement à ce qui est écrit dans le sujet, dans (ii), il faut lire $e^{\pm i\pi/3}$, et non $\pm e^{i\pi/3}$

On rappelle que $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$ est un nombre complexe tel que $j^3 = 1$, $j^2 + j + 1 = 0$, et on a $e^{i\pi/3} = -j^2 = j + 1$. On sait par ailleurs que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si il est isocèle en A, et $\widehat{BAC} = \pm\pi/3$.
$(i) \Leftrightarrow (ii)$ Le scalaire complexe $\frac{c-a}{b-a}$ est le nombre λ tel que $(c-a) = \lambda(b-a)$, il est de module 1 si et seulement si $|c-a| = |b-a|$, et son argument est l'angle $\widehat{BAC}$, ce qui donne le résultat.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Si $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3} = -j^2$, on a

$$\begin{aligned}c - a = -j^2(b-a) &\Leftrightarrow a - c = (b-a)j^2\\ &\Leftrightarrow 0 = bj^2 + a(-j^2 - 1) + c\\ &\Leftrightarrow 0 = bj^2 + aj + c\\ &\Leftrightarrow 0 = b + aj^2 + cj\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c - a = -j(b-a) &\Leftrightarrow a - c = (b-a)j \\ &\Leftrightarrow 0 = bj + a(-j-1) + c \\ &\Leftrightarrow 0 = bj + aj^2 + c \end{aligned}$$

Soit le résultat voulu. Notons que on peut intervertir a, b, c dans ces calculs (autrement dit, sur un triangle équilatéral, il n'y a pas de 'sommet privilégié').

Exercice 9. On utilise la caractérisation (iii) de l'exercice 7, avec $a = 1+i$ et $b = -1+2i$, en notant c l'affixe de M, on a

$$\begin{aligned} aj^2 + bj + c &= (1+i)j^2 + (-1+2i)j + c \\ &= j^2 + ij^2 - j + 2ij + c \\ &= j(j-1) + i(j^2 + 2j) + c \\ &= j(j-1) + i(j-1) + c \\ &= (j+i)(j-1) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} aj^2 + b + cj &= j(aj + bj^2 + c) \\ &= j((1+i)j + (-1+2i)j^2 + c) \\ &= j(j + ij - j^2 + 2ij^2 + c) \\ &= j(j - j^2 + i(j + 2j^2) + c) \\ &= j(j(1-j)(1+ij) + c) \end{aligned}$$

Donc

$$ABM \text{ équilatéral} \Leftrightarrow c \in \{(1-j)(j+i), j(j-1)(1+ij)\}$$

Feuille de TD 3

Exercice 2.

1. On a $i = e^{i\pi/2}$, donc $r : z \mapsto iz = e^{i\pi/2}z$ est une rotation (de centre 0) et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, r^n est alors une rotation de centre 0 et d'angle $\frac{n\pi}{2}$, en particulier, r^{123} est une rotation d'angle

$$\frac{123\pi}{2} \equiv 60\pi + \frac{3\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi]$$

D'où $r^{123}(z) = e^{3\pi/2}z = -iz$.
Autre méthode : On sait que $i^4 = 1$, donc

$$r^{123}(z) = i^{123}z = i^{4\times30+3}z = i^3z = -iz$$

2. On a

$$r \circ t(z) = r(t(z)) = it(z) = i(z+2) = iz + 2i$$

$$t \circ r(z) = t(r(z)) = r(z) + 2 = iz + 2$$

On remarque en particulier que $r \circ t \neq t \circ r$: la composition des applications n'est pas commutative !

3. Comme $r \circ t$ est une similitude, elle préserve l'alignement et multiplie les distances par une constante, donc $r \circ t(D)$ est une droite et $r \circ t(C)$ est un cercle.
On a plusieurs méthodes pour D :

Avec deux points : D passe par les points $(0,1),(-1,0)$, d'affixes respectives $i,-1$.
On a $r\circ t(-1)=-i+2i=i$ et $r\circ t(i)=-1+2i$, on calcule

$$\beta := i(i-(-1+2i)) = i(i+1-2i)i(1-i) = 1+i \quad \text{et} \quad \gamma = 2\mathrm{Im}(i(-1-2i)) = 2\mathrm{Im}(-i+2) = -2$$

D'où l'équation complexe $(1+i)\overline{z}+(1-i)z-2=0$.
Autre méthode : Méthode générale pour les équations : on a $t^{-1}(z)=z-2$ et $r^{-1}(z)=i^{-1}z=-iz$, donc $(r\circ t)^{-1}(z)=t^{-1}\circ r^{-1}(z)=-iz-2$. Si z respecte l'équation de D, alors $r\circ t(z)$ respecte l'équation

$$\begin{aligned}
0 &= (1+i)(r\circ t)^{-1}(z)+(1-i)\overline{(r\circ t)^{-1}(z)}+2\\
&= (1+i)(-iz-2)+(1-i)\overline{(-iz-2)}+2\\
&= -(1+i)(iz+2)+(1-i)(i\overline{z}-2)+2\\
&= -(iz+2-z+2i)+(i\overline{z}-2+\overline{z}+2i)+2\\
&= -iz-2+z-2i+i\overline{z}-2+\overline{z}+2i+2\\
&= z(-i+1)+\overline{z}(i+1)-2
\end{aligned}$$

Pour le cercle : Par son équation, il s'agit du cercle de centre 1 et de rayon 1 comme le rapport de la similitude $r\circ t$ est 1, C est envoyé sur un cercle de rayon 1, dont le centre est d'affixe $r\circ t(1)=i+2i=3i$.
Au niveau des équations, $r\circ t(z)$ respecte l'équation

$$\begin{aligned}
0 &= (r\circ t)^{-1}(z)\overline{(r\circ t)^{-1}(z)}-(r\circ t)^{-1}(z)-\overline{(r\circ t)^{-1}(z)}\\
&= (-iz-2)\overline{(-iz-2)}-(-iz-2)-\overline{(-iz-2)}\\
&= -(iz+2)(i\overline{z}-2)+(iz+2)-(i\overline{z}-2)\\
&= -(-z\overline{z}+2i\overline{z}-2iz-4)+iz+2-i\overline{z}+2\\
&= z\overline{z}-2i\overline{z}+2iz+4+iz+2-i\overline{z}+2\\
&= |z|^2+3iz-3i\overline{z}+8
\end{aligned}$$

Qui est bien l'équation du cercle de centre $3i$ et de rayon $\sqrt{9-8}=1$.

Exercice 3.
1. C'est surtout du calcul, on pose $z=a+ib$, on a

$$\begin{aligned}
f(z)=z &\Leftrightarrow -i\overline{z}+1+i=z\\
&\Leftrightarrow -i(a-ib)+1+i=a+ib\\
&\Leftrightarrow -ia-b+1+i=a+ib\\
&\Leftrightarrow 1+i=a+ib+ia+b\\
&\Leftrightarrow 1+i=a+b+i(a+b)\\
&\Leftrightarrow a+b=1
\end{aligned}$$

Les points fixes de f sont donnés par l'ensemble $F_f=\{1-b+ib \mid b\in\mathbb{R}\}$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
g(z)=z &\Leftrightarrow i\overline{z}-1+i=z\\
&\Leftrightarrow i(a-ib)-1+i=a+ib\\
&\Leftrightarrow ia+b-1+i=a+ib\\
&\Leftrightarrow -1+i=a+ib-ia-b\\
&\Leftrightarrow -1+i=a-b+i(b-a)\\
&\Leftrightarrow b=a+1
\end{aligned}$$

Les points fixes de g sont donnés par $F_g = \{a + i(a+1) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Soit ensuite $z \in F_g \cap F_f$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$z = 1 - b + ib = a + i(a+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - b = a \\ b = a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

On a donc un unique point fixe $z = i$: $F_f \cap F_g = \{i\}$.

2. On commence par calculer

$$\begin{aligned} \phi(z) := f \circ g(z) &= -i\overline{g(z)} + 1 + i \\ &= -i\overline{(i\bar{z} - 1 + i)} + 1 + i \\ &= -i(-iz - 1 - i) + 1 + i \\ &= -z + i - 1 + 1 + i \\ &= -z + 2i \end{aligned}$$

Il s'agit d'une similitude, de rapport $\alpha = -1 \neq 1$, elle admet donc un unique point fixe $\Omega = \frac{2i}{1+1} = i$. On sait alors que ϕ s'écrit $\phi(z) = \alpha(z - c) + c = -(z - i) + i$: il s'agit d'une rotation, d'angle π et de centre i.