Correction séance 1

Exercice 1. On rappelle (comme en cours) les critères de D'Alembert et de Cauchy : soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence R.
Critère de d'Alembert : Si $a_n \neq 0$, au moins à partir d'un certain rang (autrement dit, $a_n = 0$ ne se produit qu'un nombre fini de fois [1]), on considère la suite

$$u_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

dont on calcule la limite ℓ (si cette limite existe), on a alors $R = 1/\ell$.
Critère de Cauchy : On considère la suite

$$v_n := \sqrt[n]{|a_n|}$$

dont on calcule la limite ℓ (si cette limite existe), on a alors $R = 1/\ell$.

1. On utilise le critère de d'Alembert, on a $a_n = \frac{n^n}{n!}$, qui n'est jamais nul, on peut donc calculer

$$\begin{aligned} u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} \\ &= \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Il reste donc à calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a

$$u_n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

On calcule un développement limité du logarithme au voisinage de 1
Rappel : développement limité d'une fonction f 'suffisamment dérivable au voisinage de a', on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

ou la notation $o(x-a)$ désigne une expression de la forme $\varepsilon(x) * (x-a)^n$ où ε tend vers 0 quand x tend vers a.

Ici, un DL d'ordre 1 suffit, on doit juste calculer la dérivée de ln, à savoir $x \mapsto 1/x$, notre DL est donc donné par

$$\ln(x) = \ln(1) + \frac{1}{1}(x-1) + o(x-1) = x - 1 + o(x-1)$$

On applique en l'occurrence ce DL pour $x = 1 + 1/n$, on obtient donc

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad u_n = \exp\left(n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(1 + o(1)\right)$$

1. la plupart du temps on a carrément $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$

qui admet $e^1 = e$ pour limite, d'où $R = 1/e$.
2. Ici, on applique le critère de Cauchy, on a $a_n = n^n$, et $v_n = \sqrt[n]{n^n} = n$ qui admet clairement $+\infty$ pour limite, d'où $R = 0$.
3. Retour au critère de D'Alembert, là encore la suite a_n n'est jamais nulle, on calcule donc

$$\begin{aligned} u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} \\ &= \frac{4+6/n+2/n^2}{1+2/n+1/n^2} \end{aligned}$$

qui tend vers 4, d'où $R = 1/4$.
4. On termine sur un critère de Cauchy :

$$v_n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2/n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

dont on a déjà vu que la limite est e, d'où là encore $R = 1/e$.

Exercice 2. Cet exercice illustre l'imprévisibilité du comportement d'une série entière au bord de son disque de convergence. Notons S_k la série entière étudiée (qui dépend de k), on peut appliquer les deux critères, écrivons la preuve pour le critère de d'Alembert :

$$u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^k}{(n+1)^k} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k$$

Il est facile de prendre la limite de cette suite en n (parce que k ne dépend pas de n, il n'intervient pas dans le calcul de la limite !). On obtient $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1^k = 1$, donc $R_k = 1$ ne dépend en fait pas de k.

- $S_0 = \sum z^n$, si $|z^n|$, le terme général de cette suite est de module constant égal à 1 : il est impossible que la série converge, quel que soit la valeur de z telle que $|z| = 1$.
- $S_1 = \sum z^n/n$. Il est connu que cette série diverge pour $z = 1$, et converge pour $z = -1$.
- $S_2 = \sum z^n/n^2$. Pour $|z| = 1$, on a $|z^n/n^2| \leqslant 1/n^2$, qui est le terme général d'une série convergente, la série est donc toujours convergente sur le bord de son disque de convergence.

Exercice 3. 1. Comme on l'a dit, pour montrer une équivalence, on va montrer le sens direct, puis le sens réciproque.
Commençons par noter que le rayon de convergence est non nul si et seulement si il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\sum u_n\alpha^n$ converge, c'est plutôt cette seconde propriété que l'on va montrer équivalente à

$$\exists q > 0 \mid \forall n \geqslant 1, |u_n| \leqslant q^n$$

($\Rightarrow$) Supposons donc qu'il existe $\alpha > 0$ tel que la série $\sum u_n\alpha^n$ converge, on sait en particulier que le terme général $u_n\alpha^n$ tend vers 0, ce qui par définition veut dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N, |u_n\alpha^n| < \varepsilon$$

on applique cette définition pour $\epsilon = 1$, et on obtient l'existence d'un N tel que $n \geqslant N \Rightarrow |u_n| < \frac{1}{\alpha^n}$. Par ailleurs, quitte à prendre β assez grand, on peut toujours supposer que $|u_n| < \beta$ pour $1 \leqslant n \leqslant N$ (car il n'y a qu'un nombre fini de tels termes), en posant $q = \max(\beta, 1/\alpha)$, on obtient bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leqslant q^n$$

($\Leftarrow$) réciproquement, soit $q > 0$ tel que $\forall n \geqslant 1, |u_n| \leqslant q^n$, on a alors $|u_n z^n| \leqslant |qz|^n$, qui est le terme général d'une série convergente dés que $|z| < 1/q$, donc la série $\sum u_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant 1/q$.
2. Supposons que $\sum b_n z^n$ soit une série entière telle que, dans un voisinage de 0 on ait $(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n) = 1$. Or, en supposant que $\sum b_n z^n$ est de rayon de convergence non nul, le produit de Cauchy des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est donné (sur le plus petit des deux disques de convergence) par $\sum c_n z^n$ avec

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Ceci entraîne les relations suivantes (rappelons que $a_0 = 1$ par hypothèse)

$$b_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \geq 1, \ b_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$$

Réciproquement, on peut utiliser ces relations pour définir la suite $(b_n)_n$ par récurrence. Par exemple, on a $b_0 = 1$, puis $b_1 = -a_1$, $b_2 = -a_2 - a_1 b_1$ etc. La série entière ainsi définie est bien l'inverse de $\sum a_n z^n$ au voisinage de 0, à condition que $\sum b_n z^n$ ait un rayon de convergence non nul. Pour le montrer, on utilise la première question. Puisque $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul par hypothèse, d'après la première question, il existe $q > 0$ tel que $|a_n| \leq q^n$ pour tout $n \geq 1$. Pour conclure, il suffit donc de montrer par récurrence (forte) que

$$\forall n \geq 1, \ |b_n| \leq (2q)^n$$

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 1$, on a $|b_1| = |-a_1| \leq q \leq 2q$.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \geq 1$ et supposons le résultat vrai pour tout $1 \leq k \leq n$. On calcule

$$|b_{n+1}| = \left| -\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_{n+1-k} \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k||b_{n+1-k}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} q^k (2q)^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} q^{n+1} 2^{n+1-k}$$

$$= q^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n+1-k} = q^{n+1} \sum_{k'=0}^{n} 2^{k'} = q^{n+1} \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = q^{n+1}(2^{n+1} - 1) = (2q)^{n+1} - \underbrace{q^{n+1}}_{\geq 0} \leq (2q)^{n+1},$$

ce qui est bien le résultat au rang $n + 1$.
Ainsi, la série $\sum b_n z^n$ est de rayon de convergence non nul et donc l'inverse de la somme de la série $\sum a_n z^n$ est bien développable en série entière au voisinage de 0, comme souhaité.
3. On utilise la question précédente : si $S = \sum a_n z^n$ est une série entière ne s'annulant pas en 0, alors S/a_0 est aussi une série entière, dont la valeur en 0 est 1, on se retrouve donc dans la situation de la question précédente. L'inverse de S/a_0 est donc développable en série entière au voisinage de 0, comme on a

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{a_0} \frac{a_0}{S} = \frac{1}{a_0} \left(\frac{S}{a_0} \right)^{-1}$$

on en déduit que $1/S$ est développable en série entière autour de 0 (c'est le produit d'une série entière par un scalaire, en l'occurrence $1/a_0$).

Exercice 4. J'ai été assez brouillon sur mes résultats concernant la régularité des séries entières (comme quoi, les rappels sont bon pour tout le monde !). Étant donné une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R, la somme S de cette série est une fonction dérivable (en fait de classe C^∞, même holomorphe comme vous le verrez peut-être en analyse complexe) sur son disque de convergence <u>ouvert</u>, avec $S'(z) = \sum (n+1) a_{n+1} z^n$.
1. Par définition, l'exponentielle est une série entière, dont il faut calculer le rayon de convergence, ce pour quoi on utilise le critère de d'Alembert, on calcule

$$u_n = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

qui admet pour limite 0, l'exponentielle a donc un rayon de convergence infini, il s'agit donc d'une fonction continue (en fait lisse) définie sur $\mathbb{C}$.
2. C'est le même calcul que j'ai exposé en TD :

$$\begin{aligned}
\exp(z)\exp(z') &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z'^m}{m!}\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{z^k}{k!}\frac{z'^{p-k}}{(p-k)!}\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!(p-k)!}z^k z'^{p-k}\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{k!(p-k)!}z^k z'^{p-k}\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}z^k z'^{p-k}\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}(z+z')^p\\
&= \exp(z+z')
\end{aligned}$$

3. On peut utiliser les théorèmes de séries entières, qui nous disent directement que $\exp'$ est une série entière, également de rayon de convergence infini, donnée par

$$\exp'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{(n+1)!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

donc $\exp' = \exp$. On peut néanmoins également utiliser l'argument 'direct' que j'ai donné, par calcul de taux d'accroissement, on a par définition

$$\exp'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}$$

avec

$$\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \exp(x)\frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{n-1}}{n!}$$

qui est une fonction continue, valant $\exp(x)$ en 0, donc

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

soit le résultat attendu.