Correction Examen session 1 2021-2022

Exercice 1. Dans tous cet exercice, on notera $\varphi(a,b)$ la similitude directe $z \mapsto az+b$, pour $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

1. Par définition, on a

$$\mathrm{Sim}^+ = \{\varphi(a,b) \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$$

Bien-sûr, l'identité est l'application $\varphi(1,0)$, donc une similitude. Soient ensuite $\varphi(a,b)$ et $\varphi(c,d)$ deux similitudes directes, on a

$$\begin{aligned}\varphi(a,b) \circ \varphi(c,d)(z) &= a(cz+d)+b \\ &= acz + ad + b \\ &= \varphi(ac, ad+b)(z)\end{aligned}$$

Donc $\varphi(a,b)\circ\varphi(c,d) = \varphi(ac, ad+b)$ et Sim^+ est stable par composition. Enfin, on doit montrer que la réciproque d'une similitude est une similitude, on a

$$\begin{aligned}\varphi(a,b)(z) = z' &\Leftrightarrow az+b = z' \\ &\Leftrightarrow az = z'-b \\ &\Leftrightarrow z = \frac{z'}{a} - \frac{b}{a} = \varphi\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right)\end{aligned}$$

Donc $\varphi(a,b)^{-1} = \varphi\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right) \in \mathrm{Sim}^+$, qui forme donc un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{C}$ dans lui-même.

2. Par définition, on a

$$\mathrm{Sim}^+_{\mathbb{R},\mathbb{C}} = \{\varphi(a,b) \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{C}\}$$

On a vu que $Id = \varphi(1,0) \in \mathrm{Sim}^+_{\mathbb{R},\mathbb{C}}$. Ensuite, comme $\varphi(a,b)\circ\varphi(c,d) = \varphi(ac, ad+b)$, si $a, c \in \mathbb{R}^*$, alors $ac \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi(a,b)\circ\varphi(c,d) \in \mathrm{Sim}^+_{\mathbb{R},\mathbb{C}}$. Enfin, si $\varphi(a,b) \in \mathrm{Sim}^+_{\mathbb{R},\mathbb{C}}$, alors $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi(a,b)^{-1} = \varphi\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right) \in \mathrm{Sim}^+_{\mathbb{R},\mathbb{C}}$, qui forme donc un sous-groupe de Sim^+.

3. Le sous-groupe $\mathrm{Sim}^+_{\mathbb{R},\mathbb{C}}$ est distingué dans Sim^+, en effet, pour $\varphi(a,b) \in \mathrm{Sim}^+$ et $\varphi(c,d) \in \mathrm{Sim}^+_{\mathbb{R},\mathbb{C}}$ (donc $c \in \mathbb{R}^*$), on a

$$\begin{aligned}\varphi(a,b)\varphi(c,d)\varphi(a,b)^{-1} &= \varphi(ac, ad+b)\varphi\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right) \\ &= \varphi\left(\frac{ac}{a}, -ac\frac{b}{a} + ad + b\right) \\ &= \varphi\left(c, -bc + ad + b\right)\end{aligned}$$

Comme c est toujours un réel non nul, on a bien $\varphi(a,b)\varphi(c,d)\varphi(a,b)^{-1} \in \mathrm{Sim}^+_{\mathbb{R},\mathbb{C}}$, qui est donc distingué dans Sim^+.

4. Soit $\varphi(a,b) \in \mathrm{Sim}^+_{\mathbb{R},\mathbb{C}}$, on a $a \in \mathbb{R}^*$, on distingue deux cas :

- Si $a = 1$, alors $\varphi(a,b) = z + b$ est une translation de vecteur $b = \binom{\mathrm{Re}(b)}{\mathrm{Im}(b)}$
- Si $a \neq 1$, alors $az + b = a(z - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}$ est une homothétie, de rapport a, et de centre $\frac{b}{1-a}$ (autrement dit, la conjugaison par la translation de vecteur $\frac{b}{1-a}$ de l'homothétie de centre 0 et de rapport a).

5. Soit $\varphi(a,b)$ une similitude directe, on a

$$\varphi(a,b)(z) = z \Leftrightarrow az+b = z \Leftrightarrow b = z(1-a)$$

Si $a=1$, alors $\varphi(a,b)$ n'admet des points fixes que si $b=0$, on a alors $\varphi(a,b)=\varphi(1,0)=Id$, qui admet plus qu'un point fixe.
Si $a\neq 1$, ceci est équivalent à $z=\frac{b}{1-a}$, donc $\varphi(a,b)$ admet un unique point fixe si et seulement si $a\neq 1$.

6. Une similitude directe est une bijection affine directe du plan, il s'agit donc d'une rotation si et seulement si c'est une isométrie, qui n'est pas une translation. Une similitude $\varphi(a,b)$ est une translation si et seulement si $a=1$, auquel cas c'est une rotation si et seulement si c'est l'identité, on évacue donc ce cas. Ensuite, pour $z,z'\in\mathbb{C}$, on a

$$|\varphi(a,b)(z)-\varphi(a,b)(z')| = |az-az'| = |a||z-z'|$$

donc $\varphi(a,b)$ multiplie les distances par $|a|$: c'est une isométrie si et seulement si $a\in\mathbb{S}^1$.
Au final, $\varphi(a,b)$ est une rotation si et seulement si $a\in\mathbb{S}^1\setminus\{1\}$ ou si $\varphi(a,b)=Id$.
En intersectant cette condition avec la condition $a\in\mathbb{R}^*$ caractérisant les éléments de $\mathrm{Sim}^+_{\mathbb{R},\mathbb{C}}$, on obtient que les rotations de $\mathrm{Sim}^+_{\mathbb{R},\mathbb{C}}$ sont formées par

$$\{Id\}\cup\{\varphi(-1,b)\mid b\in\mathbb{C}\}$$

7. Par définition, on a

$$\mathrm{Sim}^+_{\pm1,\mathbb{C}} = \{\varphi(\pm1,b)\mid, b\in\mathbb{C}\}$$

On a vu que $Id=\varphi(1,0)\in\mathrm{Sim}^+_{\pm1,\mathbb{C}}$. Ensuite, comme $\varphi(a,b)\circ\varphi(c,d)=\varphi(ac,ad+b)$, si $a,c\in\{\pm1\}$, alors $ac\in\{\pm1\}$ et $\varphi(a,b)\circ\varphi(c,d)\in\mathrm{Sim}^+_{\pm1,\mathbb{C}}$. Enfin, si $\varphi(a,b)\in\mathrm{Sim}^+_{\pm1,\mathbb{C}}$, alors $\frac{1}{a}\in\pm1$ et $\varphi(a,b)^{-1}=\varphi\left(\frac{1}{a},\frac{-b}{a}\right)\in\mathrm{Sim}^+_{\pm1,\mathbb{C}}$, qui forme donc un sous-groupe de Sim^+.
Il s'agit d'un sous-groupe distingué : pour $\varphi(a,b)\in\mathrm{Sim}^+$ et $\varphi(\pm1,d)\in\mathrm{Sim}^+_{\mathbb{R},\mathbb{C}}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(a,b)\varphi(\pm1,d)\varphi(a,b)^{-1} &= \varphi(\pm a, ad+b)\varphi\left(\frac{1}{a},\frac{-b}{a}\right)\\ &= \varphi\left(\frac{\pm a}{a},\mp a\frac{b}{a}+ad+b\right)\\ &= \varphi\left(\pm1,\mp b+ad+b\right)\end{aligned}$$

On a bien $\varphi(a,b)\varphi(\pm1,d)\varphi(a,b)^{-1}\in\mathrm{Sim}^+_{\pm1,\mathbb{C}}$, qui est donc distingué dans Sim^+.

8. Soit une similitude indirecte $f: z\mapsto a\overline{z}+b$, on a

$$f^2(z) = a\overline{(a\overline{z}+b)}+b = a\overline{a}z+a\overline{b}+b$$

Comme $a\overline{a}=|a|^2\geqslant 0$, il ne peut être égal à -1, on ne peut donc avoir $f^2(z)=-z+2$.
Si $f=\varphi(a,b)$ est une similitude directe, on a

$$f^2 = \varphi(a^2,(a+1)b)$$

On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases}a^2=-1\\(a+1)b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\pm i\\ b=\frac{2}{a+1}=\frac{2}{1\pm i}=1\mp i\end{cases}$$

On obtient donc deux solutions : les similitudes $\varphi(i,1-i)$ et $\varphi(-i,1+i)$

Exercice 2.

1. Cette application est une inversion, c'est l'inversion de rapport 4 et de centre 1. Un nombre complexe z est un point fixe pour cette application si et seulement si

$$\begin{aligned} z = \frac{4}{\overline{z-1}} + 1 &\Leftrightarrow z\overline{(z-1)} = 4 + \overline{z} - 1 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - z = 3 + \overline{z} \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - z - \overline{z} + 3 = 0 \end{aligned}$$

Cette équation est l'équation complexe du cercle de centre 1 et de rayon 2, cercle qui admet pour équation réelle

$$(x-1)^2 + y^2 = 4$$

(où x et y désignent respectivement les parties réelles et imaginaires de z).

2. Comme $I_{1,2}$ est une inversion, il s'agit d'une involution, on a donc $I_{1,2} \circ I_{1,2} = Id$, ainsi, $I_{1,2}^n$ sera égale à Id si n est pair, et à $I_{1,2}$ si n est impair.

3. Soit $z = 1 + it$ avec $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$I_{1,2}(1+it) = \frac{4}{\overline{1+it-1}} + 1 = \frac{4}{\overline{it}} + 1 = i\frac{4}{t} + 1$$

Quand t parcourt $\mathbb{R}^*$, $\frac{4}{t}$ parcourt également $\mathbb{R}^*$, l'ensemble obtenu est la droite verticale passant par 1 (c'est à dire la droite de départ).

Exercice 3. La norme de ω est $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$, donc $\omega \in G$ le groupe des quaternions de norme 1, son inverse ω^{-1} est alors donné par son conjugué $\overline{\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a

$$\omega i \omega^{-1} = \frac{1}{2}(1+j)i(1-j) = \frac{1}{2}(i-k)(1-j) = \frac{1}{2}(i-k-k-i) = -k$$

$$\omega j \omega^{-1} = \frac{1}{2}(1+j)j(1-j) = \frac{1}{2}(j-1)(1-j) = \frac{1}{2}(j-1+1+j) = j$$

$$\omega k \omega^{-1} = \frac{1}{2}(1+j)k(1-j) = \frac{1}{2}(k+i)(1-j) = \frac{1}{2}(k+i+i-k) = i$$

La matrice orthogonale associée à ω est donc

$$M_\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'axe engendré par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = j$ est clairement stable : c'est l'axe de la rotation associée.