Correction Examen session 2 2021-2022

Exercice 1.
1. La similitude f est directe par définition, elle est à centre car $a = (1+i) \neq 1$, son unique point fixe est donné par

$$c = \frac{5i}{1-(1+i)} = \frac{5i}{i} = 5$$

Son rapport est $|1+i| = \sqrt{2}$ et son angle est $\arg 1+i = \frac{\pi}{4}$.

2. On pose $z' = f(z)$, on a

$$\begin{aligned} z' = f(z) &\Leftrightarrow z' = (1+i)z + 5i \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1+i}(z' - 5i) = z \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}(z' - 5i) = z \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/4}(z' - 5i) = z \\ &\Leftrightarrow \frac{1-i}{\sqrt{2}}z' - \frac{5i+5}{\sqrt{2}} = z \end{aligned}$$

3. On peut raisonner avec les équations, mais il y a plus simple : soit $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe, et $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

$$|f(z) - f(z')| = |az - az'| = |a||z - z'|$$

donc f multiplie les distances par $|a|$, donc f envoie le cercle de centre c et de rayon r sur le cercle de centre $f(c)$ et de rayon $|a|r$.
En l'occurrence, f envoie (C) sur le cercle de centre $f(0) = 5i$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 2. (Versions matricielle des quaternions)
1. Ces relations se vérifient à la main.

2. On développe

$$\alpha + j\beta = (a+ib) + j(c-id) = a + ib + jc - jid = a + ib + jc + kd = q$$

3. On a

$$\begin{aligned} M(q) &= a\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}i & 0\\0 & -i\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0 & -i\\-i & 0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}a & 0\\0 & a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}ib & 0\\0 & -ib\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -c\\c & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -id\\-id & 0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}a+ib & -c-id\\c-id & a-ib\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\alpha & -\overline{\beta}\\\beta & \overline{\alpha}\end{pmatrix} = M(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

4. On a

$$\overline{q} = a - ib - jc - kd = a - ib + j(-c + id) = \overline{\alpha} - j\beta$$

La matrice de $\overline{q}$ s'écrit d'après la question précédente sous la forme

$$M(\overline{q}) = M(\overline{\alpha}, -\beta) = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & -\overline{-\beta} \\ -\beta & \overline{\overline{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = {}^t\overline{M(q)}$$

5. Soit deux quaternions q_1 et q_2. Il suffit pour conclure de montrer que $M(\overline{q_1 q_2}) = M(\bar{q}_2\bar{q}_1)$. D'après la question précédente, on a

$$M(\overline{q_1 q_2}) = {}^t\overline{M(q_1q_2)} = {}^t\overline{M(q_1)M(q_2)} = {}^t(\bar{M}(q_1)\bar{M}(q_2)) = {}^t\overline{M(q_2)}\,{}^t\overline{M(q_1)} = M(\overline{q_2})M(\overline{q_1}) = M(\bar{q}_2\bar{q}_1)$$

Exercice 3.

1. La fonction φ est définie par une fraction, donc $\varphi(z)$ est défini si et seulement si $cz + d \neq 0$, autrement dit $z \neq \frac{-d}{c}$.

2. On a

$$\begin{aligned} z' = \frac{az+b}{cz+d} &\Leftrightarrow z'(cz+d) = az + b \\ &\Leftrightarrow czz' - az = b - dz' \\ &\Leftrightarrow z(cz' - a) = b - dz' \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-dz' + b}{cz' - a} \end{aligned}$$

qui n'est défini que si $z' \neq \frac{a}{c}$.

3. La formule de la question précédente donne une réciproque $\varphi^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$. La fonction φ induit donc une bijection entre $\mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. En posant $\varphi(-d/c) = \infty$ et $\varphi(\infty) = a/c$, on prolonge bien φ en une bijection (∞ admet un unique antécédent qui est $-d/c$ et a/c admet un unique antécédent qui est ∞).

4. On a déja vu qu'une homographie admet une réciproque, qui est une homographie, et ensuite, pour deux homographies

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{et} \quad z \mapsto \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

la composée est donnée par

$$\begin{aligned} z \mapsto \frac{a'\frac{az+b}{cz+d} + b'}{c'\frac{az+b}{cz+d} + d'} &= \frac{\frac{aa'z+a'b}{cz+d} + \frac{b'cz+b'd}{cz+d}}{\frac{c'az+c'b}{cz+d} + \frac{d'cz+d'd}{cz+d}} \\ &= \frac{aa'z + a'b + b'cz + b'd}{c'az + c'b + d'cz + d'd} \\ &= \frac{(aa' + b'c)z + a'b + b'd}{(c'a + d'c)z + c'b + d'b} \end{aligned}$$

Donc c'est aussi une homographie. Enfin bien-sûr, l'identité est une homographie.