EXAMEN FINAL "GÉOMÉTRIE ET NOMBRES COMPLEXES"

Exercice 1. On rapelle qu'une similitude directe est une application de la forme

$$\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto az + b \end{cases}$$

avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Question 1. On note Sim^+ l'ensemble des similitudes directes, montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{C}$ dans lui-même (la loi interne étant la loi de composition des applications).

Question 2. On note $Sim^+_{\mathbb{R},\mathbb{C}}$, l'ensemble des similitudes de la forme $z \mapsto az+b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Vous montrerez que ce groupe est un sous-groupe des similitudes directes.

Question 3. Le groupe $Sim^+_{\mathbb{R},\mathbb{C}}$ est-il un sous-groupe distingué des similitudes directes? (Justifier)

Question 4. Décomposer tout élément de $Sim^+_{\mathbb{R},\mathbb{C}}$ à l'aide de transformations géométriques élémentaires.

Question 5. A quelles conditions sur a et b une similitude directe a un unique point fixe?

Question 6. A quelles conditions sur a et b une similitude directe est-elle une rotation? Même question pour une similitude appartenant à $Sim^+_{\mathbb{R},\mathbb{C}}$.

Question 7. On note $Sim^+_{\pm 1,\mathbb{C}}$, l'ensemble des similitudes de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \{-1, 1\}$ et $b \in \mathbb{C}$. Vous montrerez que ce groupe est un sous-groupe des similitudes directes. Est-il un sous-groupe distingué?

Question 8. Une similitude indirecte est une application de la forme

$$\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto a\overline{z} + b \end{cases}$$

existe-t'il des similitudes indirectes f telles que

$$(f \circ f)(z) = -z + 2.$$

Si oui, vous les déterminerez. Vous répondrez à la même question si on suppose que f est une similitude directe.

Exercice 2. Considérons l'application

$$z \mapsto \frac{4}{\overline{\overline{z-1}}} + 1$$

Date: Janvier 2022.

Question 1. Quelle est la nature de cette application? Vous déterminerez ses points fixes et en donnerait une expression sous forme d'équation complexe et cartésienne réelle (i.e. dépendant de la partie réelle et de la partie imaginaire de z).

Question 2. Si note $I_{1,2}$ l'application précédente, que pouvez-vous dire de $I_{1,2} \circ I_{1,2}$? Que vaut $I_{1,2}^n$ où n est un entier naturel non-nul?

Question 3. Quelle est l'image des points du type $z = 1 + it$ avec $t \in \mathbb{R}^*$ par l'application $I_{1,2}$?

Exercice 3. On se donne le quaternion

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

déterminer, via l'action par conjugaison de ce quaternion sur les quaternions imaginaires i, j, k, la matrice orthogonale qui lui est associée. Vous donnerez l'axe de la rotation correspondante.