Examen seconde session (14 juin 2022)

Exercice 1. (Similitudes)

1. Montrer que la similitude f définie par

$$f(z) = (1+i)z + 5i$$

   est une similitude directe à centre, déterminer son point fixe, son rapport et son angle.

2. Calculer l'application f^{-1}.
3. Calculer l'image par f du cercle (C) de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 2. (Version matricielle des quaternions)
On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, dans lequel on définit

$$1 := I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrez ces matrices respectent les relations qui définissent les quaternions :

$$\begin{array}{cccc} -1 = I^2 = J^2 = K^2 & IJ = K & JK = I & KI = J \\ & JI = -K & KJ = -I & IK = -J \end{array}$$

2. Montrer qu'un quaternion $q = a + ib + jc + kd$ s'écrit $\alpha + j\beta$, avec $\alpha = a + ib, \beta = c - id$.
3. En déduire que la matrice $M(q) = a1 + bI + cJ + dK$ s'écrit

$$M(q) = M(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

4. On rappelle que le conjugué du quaternion $q = a+ib+jc+kd$ est donné par $\overline{q} = a - ib - jc - kd$. Montrer que $M(\overline{q}) = {}^t\overline{M(q)}$.
5. En déduire que la conjugaison des quaternions est anticommutative : $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$.

Exercice 3. (Homographies)
Soit une homographie (avec $c \neq 0$)

$$\varphi : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

1. Calculer l'ensemble de définition de φ.
2. Montrer que si $z' = \varphi(z)$, alors

$$z = \frac{dz' - b}{-cz' + a}$$

   en déduire que l'image de φ est $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$.

3. Montrer que l'on étend φ en une bijection $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en posant $\varphi(-d/c) = \infty, \varphi(\infty) = a/c$
   À partir d'ici, quand on parlera d'homographie, on parlera toujours implicitement de son extension $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
4. Montrer que les homographies forment un groupe.