Contrôle - Vendredi 15 mars 2024 (durée : 1 heure)

On tiendra compte de la correction et de la qualité de la production écrite. Toute réponse donnée doit être justifiée. **Tous les documens sont interdits durant l'épreuve, de même que les calculatrices et téléphones portables.**

Exercice 1 (6 pts)**.** On considère $E = \mathbb{R}^3$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On pose $v_1 := (1, 1, 1)$, $v_2 := (1, 0, -1)$, $v_3 := (0, 1, 1)$.

1. Montrer que $v := (v_1, v_2, v_3)$ forme une base de E.
2. Calculer la base duale $v^* := (v_1^*, v_2^*, v_3^*)$ de la base v.
3. Quelle est la base duale de la base v^* ?

Exercice 2 (6 pts)**.** Soit R un anneau commutatif unitaire. On rappelle qu'un R-module M est *simple* s'il est non nul et si ses seuls sous-R-modules sont $\{0\}$ et M.

1. Montrer qu'un R-module simple est monogène (i.e. engendré par un unique élément).
2. Soit p un nombre premier, montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module simple.
3. Soit k un corps. Quels sont les k-espaces vectoriels simples ?
4. Soient R un anneau commutatif. Soient M, N deux R-modules simples, et soit $\varphi : M \to N$ un morphisme non nul. Montrer que φ est un isomorphisme de R-modules.

Exercice 3 (6 pts)**.** On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2.

1. Rappeler la dimension de E.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{ev}_x : E \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $\mathrm{ev}_x(P) := P(x)$. Montrer que $\mathrm{ev}_x \in E^*$.
3. Montrer que, si $x, y, z \in \mathbb{R}$ sont distincts, alors la famille $(\mathrm{ev}_x, \mathrm{ev}_y, \mathrm{ev}_z)$ est une famille libre de E^*.
4. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P \in E$ tel que $P(2) = 0, P(3) = 0$ et $P(0) = 6$.
5. Calculer ce polynôme.

Exercice 4 (6 pts)**.** On considère $E = \mathbb{R}^3$, et u l'endomorphisme de E donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

1. On pose $v := (1, 1, 1)$. Montrer que la famille $\{v, u(v), u^2(v)\}$ est une base de E vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. En déduire que $\{v\}$ est une famille génératrice de (E, u) vu comme $\mathbb{R}[X]$ module.
3. Montrer que le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de u sont égaux.
4. Calculer $u^3(v)$. En déduire la matrice de u dans la base $\{v, u(v), u^2(v)\}$.