UPJV – UFR des Sciences 2022 - 2023

Licence 3 – Algèbre linéaire avancée R. Abdellatif

Examen partiel du Lundi 27 Février 2023 (Durée : 90 minutes)

Jusqu'à 3 points pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité de la production écrite. Si vous estimez que le sujet comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque sur la copie et poursuivez la rédaction en conséquence. Si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous faut la (ou les) mentionner explicitement sur votre copie.

Aucun document n'est autorisé durant l'épreuve. Les calculatrices et téléphones portables sont interdit·e·s durant l'épreuve.

Ce sujet comporte deux pages et trois exercices.

Exercice 1. — Modules simples sur un anneau commutatif (12 points) —

Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un A-module M est *simple* lorsqu'il admet exactement deux sous-A-modules, à savoir M et $\{0\}$.

1. Est-ce que $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module simple ?
2. Démontrer que tout corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-module simple.
3. A quelle condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}^*$ le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il simple ?
4. (a) Montrer qu'un A-module non nul M est simple si, et seulement si, pour tous éléments $(a, b) \in M^2$ avec a non nul, il existe un scalaire $\lambda \in A$ tel que $b = \lambda a$.
   (b) En déduire que si A est un corps, alors tout A-module simple est isomorphe à A.
5. Supposons que M et N soient deux A-modules simples.
   (a) Montrer que toute application A-linéaire non nulle de M vers N est un isomorphisme de A-modules.
   (b) En déduire que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/43\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/97\mathbb{Z}) = \{0\}$.
6. Soit M un A-module simple et m un élément non nul de M.
   (a) Démontrer que $\mathrm{Ann}(m) := \{a \in A \mid am = 0\}$ est un idéal maximal de A.
   (b) Démontrer que M est isomorphe au A-module quotient $A/\mathrm{Ann}(m)$.
7. Démontrer que pour tout idéal maximal I de A, A/I est un A-module simple.
8. En déduire une description (à isomorphisme près) de tous les $\mathbb{Z}$-modules simples.

Exercice 2. — Une caractérisation des modules de type fini (3 points) —

Soit A un anneau commutatif et M un A-module non nul. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes.

(i) M est un A-module de type fini.

(ii) Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un sous-A-module N de A^n tel que M soit isomorphe au A-module quotient A^n/N.

(iii) Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une application A-linéaire surjective $\varphi : A^n \to M$.

T.S.V.P.

UPJV – UFR des Sciences 2022 - 2023

LICENCE 3 – ALGÈBRE LINÉAIRE AVANCÉE R. ABDELLATIF

Examen partiel du Lundi 27 Février 2023

Exercice 3. — Questions de cours supplémentaires (5 points) —
Dans toute la suite, A désigne un anneau commutatif non nul et M désigne un A-module.

1. Tout sous-A-module d'un A-module de type fini est-il nécessairement un A-module de type fini ?
2. Tout sous-A-module d'un A-module libre est-il nécessairement un A-module libre ?
3. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton pour l'application A-linéaire $f \in \mathrm{End}_A(M)$.
4. Démontrer que le A-module $M \otimes_A A$ est isomorphe à M.