UPJV – UFR des Sciences 2022 - 2023

LICENCE 3 – ALGÈBRE LINÉAIRE AVANCÉE R. ABDELLATIF

Devoir à la maison – A rendre le Lundi 13 Mars 2023

Jusqu'à 3 points pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité de la production écrite. Si vous estimez que le sujet comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque sur la copie et poursuivez la rédaction en conséquence. Si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous faut la (ou les) mentionner explicitement sur votre copie.

Dans tout ce devoir, A désigne un anneau commutatif non nul.

Exercice 1. — Quelques propriétés des anneaux artiniens —

1. Etant donné un A-module M, démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :
   (a) Toute suite décroissante de sous-A-modules de M est stationnaire.
   (b) Tout ensemble non vide de sous-A-modules de M admet un élément minimal.

   L'anneau A est dit *artinien* si le A-module qu'il définit vérifie ces deux propriétés.
2. Montrer que si A est un corps, alors un A-espace vectoriel de dimension finie est artinien.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est artinien.
4. Supposons que M soit un A-module artinien.
   (a) Démontrer que tout sous-A-module de M est artinien.
   (b) Démontrer que tout A-module quotient de M est artinien.
   (c) Démontrer que tout endomorphisme injectif de M est bijectif.

Exercice 2. — Radical d'un anneau et lemme de Nakayama —

1. Démontrer que pour tout élément de A, les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) x est une unité de A ;
   (b) x n'appartient à aucun idéal maximal de A.

On appelle *radical de* A l'intersection de tous les idéaux maximaux de A. On le note $\sqrt{A}$.

2. Rappeler pourquoi $\sqrt{A}$ est un idéal de A.
3. Montrer que pour tout élément $x \in \sqrt{A}$ et tout élément $y \in A$, on a $1 + xy \in A^{\times}$.
4. A quoi est égal le radical d'un corps ? Et le radical de $\mathbb{Z}$?
5. Soient I un idéal de A et M un A-module de type fini tels que $IM = M$.
   Fixons un système générateur fini $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ de M sur A et notons $X \in M^n$ le vecteur colonne dont la i-ème coordonnée est x_i pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.
   (a) Donner un exemple de triplet (A, I, M) satisfaisant à cette situation avec M non nul.

Devoir à la maison – A rendre le Lundi 13 Mars 2023

(b) Démontrer que pour tout indice $i \in [\![1, r]\!]$, il existe une famille $(\alpha_{ij})_{1 \leq j \leq r}$ d'éléments de I vérifiant

$$x_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j \ .$$

(c) Notons A la matrice dont le coefficient à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ième colonne est α_{ij} pour toute paire $(i, j) \in [\![1, r]\!]^2$. Posons $P := \mathrm{I}_r - A$.

(i) Démontrer que l'on a $PX = 0$, puis $\det(P)X = 0$.

(ii) En déduire que l'on a $\det(P)x = 0$ pour tout élément $x \in M$.

(d) En conclure l'existence d'un élément $y \in I$ vérifiant $(1 + y)M = \{0\}$.

6. Démontrer que si I est un idéal de A contenu dans $\sqrt{A}$ et que si M est un A-module de type fini vérifiant $IM = M$, alors on a $M = \{0\}$.