Correction partiel 2022-2023

Exercice 1.

1. En général, si A est un anneau commutatif, les sous-modules de A vu comme A-module sont exactement les idéaux de A. Dans le cas de $\mathbb{Z}$, on sait que $\mathbb{Z}$ admet des idéaux propres non triviaux : par exemple $2\mathbb{Z}$. Ainsi, $\mathbb{Z}$ n'est pas simple en tant que $\mathbb{Z}$-module.

2. On utilise le même argument qu'à la question précédente. Les corps sont en effet exactement les anneaux qui n'ont aucun idéal propre non trivial.

3. On utilise la propriété universelle des modules quotients. Les sous-$\mathbb{Z}$-modules de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont en bijection avec les sous-$\mathbb{Z}$-modules de $\mathbb{Z}$ contenant $n\mathbb{Z}$, autrement dit les idéaux de $\mathbb{Z}$ contenant $n\mathbb{Z}$, autrement dit les diviseurs de n.
Si n est premier, les diviseurs de n sont exactement 1 et n, autrement dit les sous-modules de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont exactement $\{0\}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Si $n = pq$ avec $p \neq 1 \neq q$, alors $n\mathbb{Z} \subsetneq p\mathbb{Z}$ et $p\mathbb{Z}$ induit un sous-module non trivial de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
On obtient donc que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module simple si et seulement si n est premier.

4.(a). La condition proposée se reformule en

$$\forall a \in M \setminus \{0\}, \forall b \in M,\ \exists \lambda \in A \mid b = \lambda a \tag{1}$$

($\Rightarrow$) On suppose que M est simple. Soit $a \in M \setminus \{0\}$, le sous-module engendré par a est un sous-module non trivial de M : il est égal à M car M est simple. Comme le sous-module engendré par a est donné par

$$\langle a \rangle = \{\lambda a \mid \lambda \in A\}$$

L'assertion $\langle a \rangle = M$ équivaut à

$$\forall b \in M, \exists \lambda \in A \mid \lambda a = b$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in M \setminus 0$, on a bien obtenu la condition (**??**).
($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que M satisfait la condition (**??**). Soit N un sous-module non trivial de M. On peut choisir $a \in N \setminus \{0\}$. La condition donne en particulier $\langle a \rangle = M$. On a donc $M = \langle a \rangle \leqslant N \leqslant M$, d'où $N = M$ et M est simple.
(b). Soit M un A-module simple (où A est un corps). Soit $x \in M \setminus \{0\}$. On a $\langle x \rangle = M$ par la question précédente, autrement dit la famille $\{x\}$ est une famille génératrice de M. Par ailleurs la famille $\{x\}$ est libre : si λx est une combinaison linéaire avec $\lambda \neq 0$, alors

$$0 \neq x = \lambda^{-1} \lambda x$$

En multipliant par λ, on obtient $0 \neq \lambda x$. La famille $\{x\}$ est donc une base de M, qui est alors isomorphe à $A^1 = A$.

5.(a). Soit $\varphi : M \to N$ une application linéaire non nulle. Par hypothèse, $\ker \varphi \neq M$, donc $\ker \varphi = \{0\}$ car M est un module simple et $\ker \varphi$ est un sous-module de M. De même, $\operatorname{Im} \varphi$ est un sous-module de N non réduit à $\{0\}$, donc $\operatorname{Im} \varphi = N$. Le morphisme φ est donc à la fois injectif et surjectif : il s'agit d'un isomorphisme.
(b). Comme $\mathbb{Z}/43\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$ n'ont pas le même cardinal, il ne sont pas isomorphe. L'ensemble $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/43\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/97\mathbb{Z})$ ne contient donc aucun isomorphisme. Par la question précédente, il est donc réduit à l'application nulle.

6.(b). On sait déjà que $\operatorname{Ann}(m)$ est un idéal de A, c'est l'idéal annulateur de m. Comme M est simple (et m est non nul), on a $\langle m \rangle = M$. L'application $a \mapsto a.m$ est alors une application A-linéaire surjective de A dans M, dont le noyau est $\operatorname{Ann}(m)$ par définition. Par le théorème d'isomorphisme, on obtient $A/\operatorname{Ann}(m) \simeq M$ en tant que A-module.

(a). Par la propriété universelle des quotients, les sous-A-modules de $A/\mathrm{Ann}(m)$ sont en bijection avec les sous-module de A (donc les idéaux) qui contiennent $\mathrm{Ann}(m)$. Comme $A/\mathrm{Ann}(m) \simeq M$, il n'y a que deux tels idéaux : $\mathrm{Ann}(m)$ et A. Autrement dit, $\mathrm{Ann}(m)$ est maximal.

7. Une fois encore c'est la propriété universelle des quotients, les sous-A-modules de A/I sont en bijection avec les idéaux de A contenant I. Si I est maximal, on obtient que $\{0\}$ et A/I sont les seuls sous-modules de A : on a bien un module simple.

8. Par les questions 6 et 7, les A-modules simples sont (à isomorphismes près) les A modules de la forme A/I où I est un idéal maximal de A. Dans le cas de $\mathbb{Z}$, on obtient que les $\mathbb{Z}$-modules simples sont (à isomorphisme près) les modules de la forme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.

Exercice 2. $(i) \Rightarrow (iii)$. En toute généralité, soient M un A-module, et $\{m_1, \ldots, m_n\}$ une famille finie de M. On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & A^n & \longrightarrow & M \\ & (a_1, \ldots, a_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n a_i m_i \end{array}$$

Il s'agit d'une application A-linéaire :

$$\varphi(\lambda(a_i) + b_i) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_i + b_i) m_i = \lambda \sum_{i=1}^n a_i m_i + \sum_{i=1}^n b_i m_i = \lambda \varphi(a_i) + \varphi(b_i)$$

Par définition, dire que la famille $\{m_1, \ldots, m_n\}$ est génératrice équivaut à dire que φ est surjective.

Si M est de type fini, il existe une famille génératrice $\{m_1, \ldots, m_n\}$. L'application induit φ est alors une application surjective de A^n vers M.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Tout quotient d'un module de type fini est à son tour de type fini. Comme A^n est de type fini (car libre), le quotient A^n/N est alors de type fini, de même que M par isomorphisme.

$(iii) \Leftrightarrow (ii)$ Est immédiat par propriété des quotients, dans le premier cas, l'application φ est donnée par la projection canonique. Dans le second cas, le sous-module N est le noyau de l'application φ.

Exercice 3.

1. On considère l'anneau $A := \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_i, \ldots]$ des polynômes à une infinité de variables. Le A-module A est de type fini car libre. On considère le sous-module $M = (X_1, \ldots, X_i, \ldots)$ formé par les polynômes sans terme constant. Le sous-module M n'est pas de type fini. En effet, soit $P_1, \ldots, P_n$ une famille finie de polynômes dans A. Comme la famille est finie, elle ne fait intervenir qu'un nombre fini de variables. Soit donc X_k une variable n'apparaissant dans aucun P_i. Une combinaison linéaire de la forme

$$\sum_{i=1}^n Q_i P_i$$

ne peut alors être égale à X_k pour des raisons de degré. Donc $P_1, \ldots, P_n$ ne peut engendré M (car elle n'engendre pas tous ses générateurs).

2. Considérons $A := \mathbb{C}[X, Y]$. Le A-module A est un module libre. Considérons le sous-module $M = (X, Y)$. Le sous-module M n'est ni nul, ni libre de rang 1 (car c'est un idéal non principal). On montre que toute famille de cardinal 2 est non libre : soient P, Q deux polynômes dans M. On a

$$QP - PQ = 0$$

une combinaison linéaire nulle à coefficients non nuls : $\{P, Q\}$ n'est pas une famille libre. Le module M ne peut être libre : il aurait une base de cardinal au moins 2, ce qui est impossible.

3.

4. On a premièrement une application

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : M & \longrightarrow & M \otimes_A A \\ & m & \longmapsto & m \otimes 1 \end{array}$$

qui est A-linéaire :

$$\varphi(am+m') = (am+m')\otimes 1 = a(m\otimes 1) + (m'\otimes 1) = a\varphi(m) + \varphi(m')$$

Réciproquement, on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\psi}: & M\times A & \longrightarrow & M \\ & (m,a) & \longmapsto & a.m \end{array}$$

qui est A-bilinéaire :

- $\widetilde{\psi}(\lambda m+m',a) = a.(\lambda m+m') = \lambda.a.m + a.m' = \lambda\widetilde{\psi}(m,a) + \widetilde{\psi}(m',a)$
- $\widetilde{\psi}(m,\lambda a+a') = (\lambda a+a').m = \lambda.a.m + a'.m = \lambda\widetilde{\psi}(m,a) + \widetilde{\psi}(m,a')$

Par propriété universelle du produit tensoriel, $\widetilde{\psi}$ induit alors une application linéaire $\psi : M\otimes_A A \to M$. Pour $m\in M$, on a $\psi\circ\varphi(m) = \psi(m,1) = m$. Ensuite, pour $m\otimes a$ un tenseur pur, on a

$$\varphi\circ\psi(m\otimes a) = \varphi\circ\widetilde{\psi}(m,a) = \varphi(am) = (am)\otimes 1 = m\otimes a$$

donc $\varphi\circ\psi$ induit l'identité sur les tenseurs purs. Comme les tenseurs purs engendrent $M\otimes_A A$, on a bien que ψ et φ sont des bijection réciproques l'une de l'autre.