Correction Examen session 1 2022-2023

Exercice 1.

1. Soit A un anneau (commutatif unitaire), et soit M un A-module de type fini. Il existe un unique entier $r \geqslant 0$, ainsi qu'une unique suite $d_1, \ldots, d_k$ d'éléments non nuls et non inversibles de A telle que

$$M \simeq A^r \oplus A/(d_1) \oplus \ldots \oplus A/(d_k)$$

(en tant que A-module) et telle que $d_1 | d_2 | \ldots | d_k$ (les d_i sont uniques à multiplication près par un inversible de A.

2. Le A-module $A[X]$ est libre et admet $\{X^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ comme base, il s'agit donc d'un module libre sur A. Il ne s'agit cependant pas d'un module de type fini sur A. Soit en effet une famille finie $\{P_1, \ldots, P_n\}$ de $A[X]$. On peut supposer (quitte à les réordonner) que l'on a $\deg P_1 \leqslant \ldots \leqslant \deg P_n$. Les éléments du sous-module M de $A[X]$ engendré par la famille $\{P_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont tous de la forme

$$P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i$$

pour une famille $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de A. Le degré d'une telle combinaison linéaire est au plus égal à $\deg P_n$, donc la famille $\{P_1, \ldots, P_n\}$ n'est pas une famille génératrice de $A[X]$ (le polynôme $X^{1+\deg P_n}$ n'est par exemple pas dans M).

3. On note premièrement que ces deux groupes ont le même cardinal, à savoir 254100. Pour vérifier s'ils sont isomorphes ou non, on cherche à utiliser le théorème de classification des modules de type fini sur les anneaux principaux. On peut appliquer ce théorème car $\mathbb{Z}$ est euclidien (donc principal), et les deux groupes considérés sont finis, donc de type fini comme $\mathbb{Z}$-modules. On utilise le théorème des restes chinois afin d'écrire les deux groupes considérés sous la forme donnée dans la question 1.

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/77\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/132\mathbb{Z} &\simeq \mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \\ &\simeq \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(11 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 25)\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/23100\mathbb{Z}\end{aligned}$$

On a bien que 11 divise 23100, les facteurs invariants du premier groupe sont donc 11 et 23100.
Pour le second groupe, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/121\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/105\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} &\simeq \mathbb{Z}/121\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ &\simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(121 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4)\mathbb{Z} \\ &\simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/50820\mathbb{Z}\end{aligned}$$

On a bien que 5 divise 50820, les facteurs invariants du second groupe sont donc 5 et 50820. Les deux groupes abéliens considérés ne sont donc pas isomorphes car leurs facteurs invariants sont différents.

4. Un espace vectoriel n'est pas toujours isomorphe à son espace bidual. Si E est une espace vectoriel de dimension infinie, on sait que $\dim E^* > \dim E$. On a donc $\dim E^{**} > \dim E$, ces deux espaces ne peuvent donc pas être isomorphes.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $u = \lambda \,\mathrm{Id}$. Le polynôme $P(X) = (X - \lambda)$ est clairement un polynôme annulateur (de degré 1) de u. Comme le polynôme minimal μ_u de u doit diviser P, on obtient que μ_u est de degré $\leqslant 1$. Par ailleurs, comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 (comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel), le polynôme caractéristique χ_u de u est de degré 3, il ne peut donc être égal à μ_u.

Exercice 2.

1. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\varphi}: & \mathbb{Z}[X]\times\mathbb{Z}[Y] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[X,Y] \\ & (P(X),Q(Y)) & \longmapsto & P(X)Q(Y) \end{array}$$

On montre que $\widetilde{\varphi}$ est $\mathbb{Z}$-bilinéaire.

- Soient $P_1(X), P_2(X) \in \mathbb{Z}[X]$, $Q(Y) \in \mathbb{Z}[Y]$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(kP_1(X)+P_2(X),Q(Y)) &= (kP_1(X)+P_2(X))Q(Y) \\ &= kP_1(X)Q(Y)+P_2(X)Q(Y) \\ &= k\widetilde{\varphi}(P_1(X),Q(Y))+\widetilde{\varphi}(P_2(X),Q(Y))\end{aligned}$$

  Donc $\widetilde{\varphi}$ est linéaire par rapport à sa première variable.
- Soient $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$, $Q_1(Y), Q_2(Y) \in \mathbb{Z}[Y]$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(P(X),kQ_1(Y)+Q_2(Y)) &= P(X)(kQ_1(Y)+Q_2(Y)) \\ &= kP(X)Q_1(Y)+P(X)Q_2(Y) \\ &= k\widetilde{\varphi}(P(X),Q_1(Y))+\widetilde{\varphi}(P(X),Q_2(Y))\end{aligned}$$

  Donc $\widetilde{\varphi}$ est linéaire par rapport à sa seconde variable.

Ainsi, $\widetilde{\varphi}$ induit un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules bien défini allant de $\mathbb{Z}[X]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[Y]$ vers $\mathbb{Z}[X,Y]$, ce morphisme envoie un tenseur simple $P(X)\otimes Q(Y)$ sur $\varphi(P(X)\otimes Q(Y)) = P(X)Q(Y)$.
Réciproquement, le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[X,Y]$ est libre et admet pour base la famille des monômes $\{X^iY^j\}_{i,j\in[\![1,n]\!]}$. L'application $\psi : \mathbb{Z}[X,Y] \to \mathbb{Z}[X]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[Y]$ définie par $\psi(X^iY^j) := X^i\otimes Y^j$ et étendue par linéarité est un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules. On montre que ϕ et ψ sont des isomorphismes de modules, réciproques l'un de l'autre.
Soit X^iY^j un monôme dans $\mathbb{Z}[X,Y]$, on a

$$\varphi\circ\psi(X^iY^j) = \varphi(X^i\otimes Y^j) = X^iY^j$$

donc $\varphi\circ\psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}[X,Y]}$ (car cette égalité est vraie sur une famille génératrice de $\mathbb{Z}[X,Y]$: les monômes).
Réciproquement, soit $P(X)\otimes Q(Y) \in \mathbb{Z}[X]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[Y]$ un tenseur simple. On pose

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i \text{ et } Q(Y) = \sum_{j=0}^{m} b_jX^j$$

On a

$$\begin{aligned}\psi\circ\varphi(P(X)\otimes Q(Y)) &= \psi(P(X)Q(Y)) \\ &= \psi\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_ib_jX^iY^j\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_ib_j\psi(X^iY^j) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_ib_j(X^i\otimes Y^j) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_iX^i\right)\otimes\left(\sum_{j=0}^{m} b_jY^j\right) \\ &= P(X)\otimes Q(Y)\end{aligned}$$

On a donc $\psi\circ\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}[X]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[Y]}$ (car cette égalité est vraie sur une famille génératrice de $\mathbb{Z}[X]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[Y]$: les tenseurs simples).

Autre méthode. On sait que $\mathbb{Z}[X]$ (resp. $\mathbb{Z}[Y]$) est un $\mathbb{Z}$-module libre, admettant pour base $\{X^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (resp. $\{Y^j\}_{j\in\mathbb{N}}$). On a alors que le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[X]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[Y]$ est libre, et admet pour base $\{X^i\otimes Y^j\}_{i,j\in[\![1,n]\!]}$. Cette dernière base étant naturellement en bijection avec la base de $\mathbb{Z}[X,Y]$, on obtient que ces deux modules sont isomorphes.

2. On considère l'application suivante

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[i] \\ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n}(a_k\otimes i^k) \end{array}$$

(qui correspond plus ou moins à une évaluation en i). On montre que f est un morphisme d'anneaux. On a premièrement $f(0)=0$ et $f(1)=1\otimes i^0=1$. Ensuite, on considère deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$

$$P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ et } Q(X)=\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell X^\ell$$

si $n<m$, on pose $a_k=0$ pour $n<k\leqslant m$ de sorte que

$$P(X)=\sum_{k=0}^{m} a_k X^k$$

de même si $m<n$, on pose $b_\ell=0$ pour $m<\ell\leqslant n$. On a alors On a

$$\begin{aligned} f(P(X)-Q(X)) &= f\left(\sum_{k=0}^{\max(n,m)}(a_k-b_k)X^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\max(n,m)}(a_k-b_k)\otimes i^k \\ &= \sum_{k=0}^{\max(n,m)} a_k\otimes i^k - \sum_{k=0}^{\max(n,m)} b_k\otimes i^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k\otimes i^k - \sum_{k=0}^{m} b_k\otimes i^k \\ &= f(P)-f(Q) \end{aligned}$$

On a donc que f est un morphisme de groupes abéliens $(\mathbb{R}[X],+)\to(\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[i],+)$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned} f\left(P(X)Q(X)\right) &= f\left(\sum_{q=0}^{n+m}\left(\sum_{p=0}^{q} a_p b_{q-p}\right)X^q\right) \\ &= \sum_{q=0}^{n+m}\left(\sum_{p=0}^{q} a_p b_{q-p}\right)\otimes i^q \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\otimes i^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell\otimes i^\ell\right) \\ &= f(P(X))f(Q(X)) \end{aligned}$$

donc f est bien un morphisme d'anneaux. On montre ensuite que f est surjectif. Comme f est en particulier un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules (=groupes abéliens), il suffit de montrer que $\operatorname{Im} f$ contient une famille génératrice de $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[i]$. Soit $\alpha\otimes(a+ib)\in\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[i]$ un tenseur simple. On a

$$\alpha\otimes(a+ib)=f(\alpha a+\alpha bX)\in\operatorname{Im} f$$

donc $\operatorname{Im} f$ contient tous les tenseurs purs de $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[i]$ et $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[i]$.
On montre enfin que $\operatorname{Ker} f$ est l'idéal engendré par X^2+1. On sait déjà que $\operatorname{Ker} f$ est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ (car f est un morphisme d'anneaux) et que $\operatorname{Ker} f\neq\mathbb{R}[X]$, car $f(1)=1\otimes 1\neq 0$. Par ailleurs, comme

$$f(X^2+1)=1\otimes i^2+1\otimes i^0=-(1\otimes 1)+(1\otimes 1)=0$$

on a bien $X^2+1 \in \operatorname{Ker} f$ et $(X^2+1) \subset \operatorname{Ker} f$. Comme X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$ (il est de degré 2 et n'admet pas de racines réelles), l'idéal (X^2+1) de $\mathbb{R}[X]$ est maximal, on a donc $\operatorname{Ker} f = (X^2+1)$, et on conclut par le théorème d'isomorphisme pour les anneaux.

Exercice 3.
1. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$. Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $P, Q \in \mathbb{Q}_n[X]$, on a

$$\varepsilon_\alpha(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(\alpha) = \lambda P(\alpha) + Q(\alpha) = \lambda \varepsilon_\alpha(P) + \varepsilon_\alpha(Q)$$

L'application $\varepsilon_\alpha : \mathbb{Q}_n[X] \to \mathbb{Q}$ est donc $\mathbb{Q}$-linéaire : il s'agit d'une forme linéaire sur $\mathbb{Q}_n[X]$.

2. On pose $F = \operatorname{Vect}(\varepsilon_{\alpha_i} \mid i \in [\![1, n+1]\!]) \subset \mathbb{Q}_n[X]^*$. Comme les ε_{α_i} sont au nombre de $n+1$ et que $\dim \mathbb{Q}_n[X]^* = \dim \mathbb{Q}_n[X] = n+1$ (car $\mathbb{Q}_n[X]$ est de dimension finie), il suffit pour conclure de montrer que les ε_{α_i} forment une famille génératrice de $\mathbb{Q}_n[X]^*$, autrement dit que $F = \mathbb{Q}_n[X]^*$. On étudie l'orthogonal F° de F au sens des formes linéaires. Pour $P \in \mathbb{Q}_n[X]$, on a

$$\begin{aligned} P \in F^\circ &\Leftrightarrow \forall \varphi \in F, \varphi(P) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n+1]\!], \varepsilon_{\alpha_i}(P) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n+1]\!], P(\alpha_i) = 0 \end{aligned}$$

L'espace F° est donc constitué des polynômes de degré $\leqslant n$ qui s'annule sur tous les α_i. Comme les α_i sont tous distincts et au nombre de $n+1$, un tel polynôme admet $n+1$ racines distinctes tout en étant de degré au plus n. On a alors $F^\circ = \{0\}$. Comme $\mathbb{Q}_n[X]$ est de dimension finie (égale à $n+1$), on a

$$F = (F^\circ)^\perp = \{0\}^\perp = \{\varphi \in \mathbb{Q}_n[X]^* \mid \varphi(0) = 0\} = \mathbb{Q}_n[X]^*$$

soit le résultat voulu.

Exercice 4. On calcule la forme normale de Smith de la matrice dont les colonnes sont données par les deux vecteurs considérés :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les facteurs invariants du module N sont les facteurs invariants de la matrice M, ici 1 et 1. On en conclut en particulier qu'une base de M adaptée à N est une base de M dont les deux premiers vecteurs forment une base de N. On peut essayer (pourquoi pas ?) de compléter la famille génératrice de N donnée en une base de M (ce n'est peut-être pas possible, mais si ça l'est, on aura une base de M adaptée à N par construction). Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, on a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 3 & b \\ 3 & 2 & c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & b \\ 2 & c \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3c - 2b - 9a \end{aligned}$$

Pour que l'on ait une base de M, il faut (et il suffit) que cette quantité soit égale à ± 1. Comme 3 et 2 sont premiers entre eux, on peut prendre par exemple $(a,b,c) = (0,1,1)$. La famille $(1,0,3),(0,3,2),(0,1,1)$ est ainsi une base de M adaptée à N.

Autre méthode. En extrayant l'information de notre calcul de forme normale de Smith, on obtient

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & -1\\ -9 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

On sait alors q'une base de M adaptée à N est donnée par les colonnes de l'inverse de la matrice

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & -1\\ -9 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

En inversant cette matrice, on retrouve la réponse précédente.

Exercice 5.

1. Soit f un endomorphisme cyclique de E. Le $\mathbb{K}[X]$-module (E,f) est par hypothèse isomorphe (comme $\mathbb{K}[X]$-module) à un module de la forme $\mathbb{K}[X]/(P)$ pour un certain $P \in \mathbb{K}[X]$. Notons u l'image de $1+(P) \in \mathbb{K}[X]/(P)$ par l'isomorphisme $\mathbb{K}[X]/(P) \to (E,f)$. Tout élément de $\mathbb{K}[X]/(P)$ s'écrit sous la forme $Q(X)+(P)$. On peut remplacer Q par le reste de sa division euclidienne par P et ainsi supposer que $\deg(Q) < \deg(P)$. Comme E est de dimension n comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que $\mathbb{K}[X]/(P)$ est de dimension $\deg P$ comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on obtient $\deg P = n$. Ainsi, tout élément de $\mathbb{K}[X]/(P)$ s'écrit sous la forme

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i(X^i + (P)) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i(1+(P))$$

par l'isomorphisme $\mathbb{K}[X]/(P) \simeq (E,f)$, on obtient que tout élément de (E,f) s'écrit sous la forme

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(u)$$

autrement dit, la famille $u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u)$ est une famille génératrice de E en tant que $\mathbb{K}$-module. Comme il s'agit d'une famille de cardinal n et comme $\dim E = n$, on trouve bien qu'il s'agit d'une base de E comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.(a) Soit f un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Les λ_i sont les racines du polynôme caractéristique χ_f de f. Le polynôme $(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n)$ divise donc χ_f. Par égalité des degrés, on trouve (au signe près, dépendant de la définition de χ_f)

$$\chi_f(X) = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n)$$

Soit $P_1, \ldots, P_k$ la suite des invariants de similitude de f (sur $\mathbb{K}$). Comme P_1 divise χ_f et est de degré $\geqslant 1$ il existe un λ_i tel que $X - \lambda_i | P_1 | P_2 | \ldots | P_k$. On a alors que $(X-\lambda_i)^k$ divise $P_1 \cdots P_k = \chi_f$, d'où $k=1$ car la plus grande puissance de $(X-\lambda_i)$ divisant χ_f est $X - \lambda_i$.
L'endomorphisme f admet donc un unique invariant de similitude $P_1 = \mu_f = \chi_f$ et est donc cyclique.
Autre méthode. On sait que les valeurs propres de f sont toutes des racines du polynôme minimal μ_f de f. Comme f admet n valeurs propres distinctes, on trouve que μ_f est au moins de degré n. Comme n est également le degré de χ_f et que μ_f divise χ_f (Cayley-Hamilton), on trouve $\mu_f = \chi_f$ et f est cyclique.
(b) Soit f un endomorphisme de E représenté par une matrice compagnon $\mathcal{C}(P)$ (pour un certain $P \in \mathbb{K}[X]$). On sait que f est cyclique et que son unique invariant de similitude est $P = \chi_f = \mu_f$. Il suffit alors de prendre un polynôme P qui n'a pas n racines distinctes. On peut par exemple prendre $P = (X-\lambda)^n$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$. On obtient en particulier

$$\mathcal{C}((X-\lambda)^2) = \begin{pmatrix}0 & -\lambda^2\\ 1 & -2\lambda\end{pmatrix}$$

un tel endomorphisme est cyclique, mais n'admet qu'une seule valeur propre : λ.

Exercice 6. Le produit tensoriel $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est bien défini comme produit tensoriel de deux groupes abéliens (i.e de $\mathbb{Z}$-modules). Soit $n = |G|$, et soit $g \otimes \frac{a}{b}$ un tenseur simple de $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. On sait (théorème de Lagrange) que $ng = 0$, on a donc

$$g \otimes \frac{a}{b} = g \otimes \frac{na}{nb} = ng \otimes \frac{a}{nb} = 0 \otimes \frac{a}{nb} = 0$$

Tous les tenseurs simples de $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sont donc nuls. Comme ceux-ci engendrent $G \otimes_{\mathbb{Z}} Q$, on obtient bien que ce dernier groupe abélien est trivial.